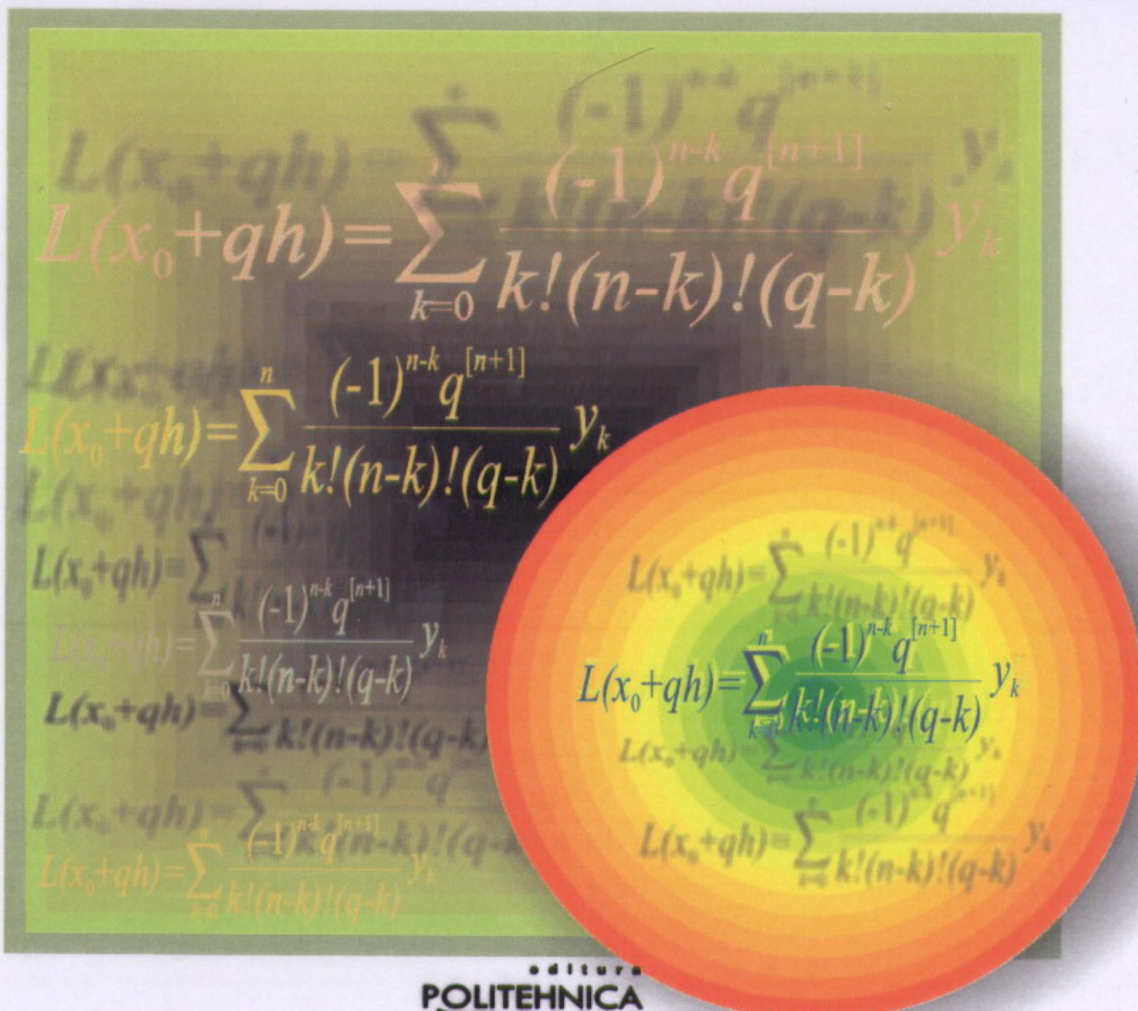
Anton HADĂR
Cristian PETRE
Cornel MARIN
Adrian VOICU

METODE NUMERICE ÎN INGINERIE



editura POLITEHNICA PRESS

Prof. dr. ing. ANTON HADAR

Prof. dr. ing. CORNEL MARIN

Conf. dr. ing. CRISTIAN PETRE

As. drd. ing. ADRIAN VOICU

METODE NUMERICE
ÎN INGINERIE

Politehnica Press

Bucureşti 2004

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

Hadar, Anton, Metode numerice în inginerie /

269 p; 15 cm - (Universitaria)

I. Marin Cornel

II. Petre Cristian

III. Voicu Adrian

Bibliogr.

ISBN

Recenzia ştiinţifică:

Prof. dr. ing. Constantin ATANASIU

Prof. dr. ing. Horia GHEORGHIU

Tehnoredactare computerizată

Cornel MARIN

PREFAȚĂ

Metode numerice face parte din disciplinele fundamentale de pregătire a studenților din domeniul ingineriei, având ca scop prezentarea principiilor şi relațiilor de calcul matematic numeric care stau astăzi la baza costrucției programelor de calcul profesinale utilizate în prezent de orice inginer (MATHCAD, MATLAB, MATHEMATICA, ANSYS, NASTRAN, COSMOS, etc). Aceaste principii şi relații de calcul se referă în principal la operațiile de interpolare, derivare şi integrare numerică precum şi la metodele de rezolvarea a ecuațiilor, sistemelor de ecuații sau ecuațiilor diferențiale. Este ştiut faptul că prin metodele analitice cunoscute nu se pot rezolva orice tipuri de probleme, dar la baza metodelor numerice stau metode şi modele de calcul analitic specifice algebrei şi analizei matematice. Metodele numerice prezentate în continuare au „pretenția” de a fi metode generale de calcul care acoperă o foarte mare gamă de probleme întâlnite în practica inginerească, rezultatele numerice obținute fiind în general aproximative dar compatibile cu soluția exactă.

Metodele numerice prezentate în lucrare permite rezolvarea unor probleme celebre care au preocupat pe matematicieni şi ingineri de-a lungul timpului, unele din acestea purtând numele lor. În acest sens amintim pe Isaac Newton (1642-1727), Leonard Euler (1707-1783), I.K.G. Gauss (1777-1855), K.G. Jacobi (1804-1855), B Taylor (1685-1731), J.L. Lagrange (1736-1813), J.J.B. Fourier (1768-1830) a căror contribuție la descoperirea sau dezvoltarea metodelor numerice de calcul a fost hotărâtoare.

În ultima perioadă metodele numerice s-au dezvoltat foarte mult, în special datorită progresului tehnicii de calcul, care a permis rezolvarea unui număr din ce în ce mai mare de ecuații cu o viteză şi precizie foarte ridicată. De remarcat faptul că în ultima perioadă, *metoda elementelor finite* s-a impus ca o metodă particulară de rezolvare a unor sisteme de ecuații liniare obținute prin aplicarea unor principii variaționale de calcul structural, termic, electric, în mecanica fluidelor, etc. care s-a dezvoltat foarte mult grație progresului tehnicii de calcul. Metoda elementelor finite foloseşte algoritmi de rezolvare exactă sau aproximativă a sistemelor de ecuații liniare care sunt prezentați şi în această lucrare: Gauss, Gauss-Jordan, Choleski, Gauss-Seidel, Jacobi, Newton Raphson, etc.

Cele zece capitole ale lucrării cuprind:

1. Metodele aproximative de rezolvare a ecuațiilor algebrice transcendente;
2. Metode exacte şi aproximative de rezolvare a sitemelor de ecuații liniare;
3. Metode aproximative de rezolvare a sitemelor de ecuații neliniare;

4. Metode de determinare a valorilor şi vectorilor proprii ai unei matrice;
5. Metode ale diferenţelor finite;
6. Metode de interpolare a funcţiilor;
7. Metode de derivare;
8. Metode de integrare numerică;
9. Metode de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale ordinare;
10. Metoda deplasărilor.

Lucrarea este destinată în primul rând pregătirii studenţilor din primii ani din cadrul universităţilor tehnice şi presupune cunoştinţe minime de analiză matematică, algebră şi geometrie analitică. Lucrarea poate fi utilă în aceeaşi măsură şi inginerilor, cercetătorilor care folosesc calculul numeric, fiind bine exemplificată prin rezolvarea unor aplicaţii din domeniul ingineriei.

Autorii speră ca această lucrare să răspundă nevoilor actuale şi acceptă orice sugestie, observaţie sau completare care vine din partea utilizatorilor, în vederea îmbunătăţirii sau completării unor viitoare ediţii.

Bucureşti, martie 2005 **Autorii**

CUPRINS

CAPITOLUL IX – METODE DE REZOLVARE A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE ORDINARE

CAPITOLUL X - METODA DEPLASĂRILOR

1. METODE NUMERICE DE REZOLVARE A ECUAȚIILOR ALGEBRICE

În practica inginerească se întâlnesc adeseori situații în care este necesară rezolvarea unor ecuații algebrice polinomiale sau transcendente cu o singură variabilă, ale căror soluții nu se pot obține pe cale analitică, prin metodele cunoscute în algebră. Pentru rezolvarea unor asemenea ecuații se folosesc metode numerice de calcul aproximativ care permit calculul rădăcinilor cu o precizie suficientă unui calcul ingineresc obişnuit.

Fie o ecuație algebrică de forma $f(x)=0$. Condiția necesară şi suficientă pentru ca acesta să aibă o singură soluție în intervalul $[a,b]$ este ca funcția $f(x)$ să fie continuă, strict monotonă şi să prezinte o schimbare de semn pe intervalul $[a,b]$, deci $f(x)$ trebuie să îndeplinească condițiile:

1. $f:[a,b]\rightarrow R$ să fie o funcție Rolle , continuă şi derivabilă în intervalul $[a,b]$ cu $f'(x)>0$ sau $f'(x)<0$;
2. $f(a)\cdot f(b)<0 \;\Leftrightarrow\; f(a)<0,\; f(b)>0 \;\; sau \;\; f(a)>0,\; f(b)<0$;

Cele mai utilizate metode numerice aproximative pentru determinarea soluțiilor unei ecuații algebrice sunt:

1. *metoda înjumătățirii intervalului (bisecției);*
2. *metoda coardei (secantei);*
3. *metoda tangentelor de ordinul I a lui Newton (Newton- Raphson);*
4. *metoda tangentelor de ordinul II a lui Newton;*
5. *metoda iterativă pentru ecuații de forma x=g(x).*

Un caz particular de aplicare a metodelor lui Newton îl constituie extragerea rădăcinii de ordinul k dintr-un număr pozitiv N .

1.1. Metoda înjumătățirii intervalului (bisecției)

Este cea mai simplă si intuitivă metodă numerică pentru determinarea rădăcinii unei ecuații algebrice de forma $f(x)=0$, rădăcină află în intervalul *(a,b)*. Condițiile necesare pentru a putea aplica această metodă sunt:

- *f(x)* să fie o funcție continuă, derivabilă şi strict monotonă în intervalul $[a,b]$;
- funcția să prezinte o variație de semn în intervalul $[a,b]$, adică

$$f(a)\cdot f(b)<0 \tag{1.1}$$

Metoda se bazează pe următorul algoritm:

1. se calculează valorile funcţiei *f(x)* în trei puncte: la capetele intervalului *a*, *b* şi la mijlocul distanţei: $c = (a+b)/2$ şi se verifică semnele;
2. se calculează din nou valorile funcţiei *f(x)* pentru subintervalul pentru care funcţia prezintă variaţie de semn în trei puncte: la capetele intervalului respectiv la mijlocul distanţei;
3. se repetă algoritmul până când se obţine o lungime pentru ultimul subinterval mai mică decât eroarea cerută pentru calculul rădăcinii: $\varepsilon = x_{n+1} - x_n$

Sunt posibile următoarele patru cazuri prezentate în tabelul 1.1:

Tabelul 1.1

Caz	*f(a)*	*f(c)*	*f(b)*	*Rădăcina* ξ
1	-	+	+	$\xi\in(a,c)$
2	-	-	+	$\xi\in(c,b)$
3	+	+	-	$\xi\in(c,b)$
4	+	-	-	$\xi\in(a,c)$

În figura 1.1 este prezentat graficul unei funcţii ce corespunde cazului 1 şi apoi cazului 2 prezentate în tabelul 1.1.

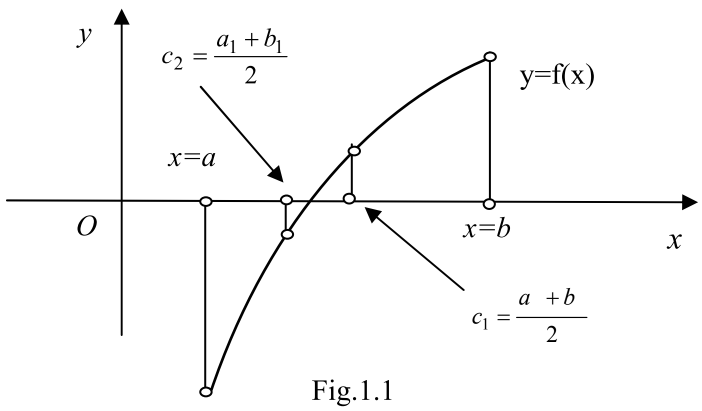


Fig.1.1

Aplicaţia 1.1

Folosind metoda bisecţiei să se afle rădăcina ecuaţiei algebrice transcendente: $ln\,x + 3x^2 - 4x - 1 = 0$, cu o eroare $\varepsilon<10^{-5}$ (cu cinci zecimale exacte), ştiind că această rădăcină se află în intervalul $[1, 2]$.

Rezolvare: Pentru determinarea soluţiei ecuaţiei date se aplică algoritmul prezentat mai sus obţinându-se valorile din tabelul 1.2.

Tabelul 1.2

n	a_n	c_n	b_n	$f(a)$	$f(c)$	$f(b)$	Eroarea ε
1	1	1,5	2	-2	0,155465	3,693	1
2	1	1,25	1,5	-2	-1,089	0,155465	0,25
3	1,25	1,375	1,5	-1,089	-0,50967	0,155465	0,125
4	1,375	1,4375	1,5	-0,50967	-0,1878	0,155465	0,0625
5	1,4375	1,46875	1,5	-0,1878	-0,0189	0,155465	0,03125
6	1,46875	1,484375	1,5	-0,0189	0,0676	0,155465	0,015625
7	1,46875	1,4765625	1,484375	-0,0189	0,0241772	0,0676	0,0078125
8	1,46875	1,472656	1,476562	-0,0189	0,002592	0,024177	0,0039
9	1,46875	1,470703	1,472656	-0,0189	-0,00817	0,002592	0,0019
10	1,470703	1,471680	1,472656	-0,008169	-0,00279	0,002592	-0,00097
11	1,471680	1,472168	1,472656	-0,00279	-0,0001	0,002592	-0,00098
12	1,472168	1,472412	1,472656	-0,0001	0,0012	0,002592	0,000244
13	1,472168	1,472290	1,472412	-0,0001	0,0005	0,0012	0,00012
14	1,472168	1,472229	1,472290	-0,0001	0,0002	0,0005	0,00006
15	1,472168	1,472198	1,472229	-0,0001	0,00007	0,0002	0,00003
16	1,472168	1,472183	1,472198	-0,0001	-0,00001	0,00007	0,000015

Metoda bisecției este *slab convergentă*. Soluția aproximativă a ecuației este $\xi=1,4765625$ calculată cu o eroare $\varepsilon < 10^{-5}$ după şaisprezece paşi.

1.2. Metoda coardei (secantei)

Se consideră o funcție $f(x)$ continuă şi derivabilă pe intervalul $[a, b]$ astfel încât îşi modifică semnul, adică este îndeplinită condiția $f(a)\cdot f(b)<0$. Fără a limita generalitatea metodei presupunem că ecuația $f(x)=0$ are o singură rădăcină $\xi \in (a,b)$ ca în figura 1.2 (cu $f(a)<0$ şi $f(b)>0$).

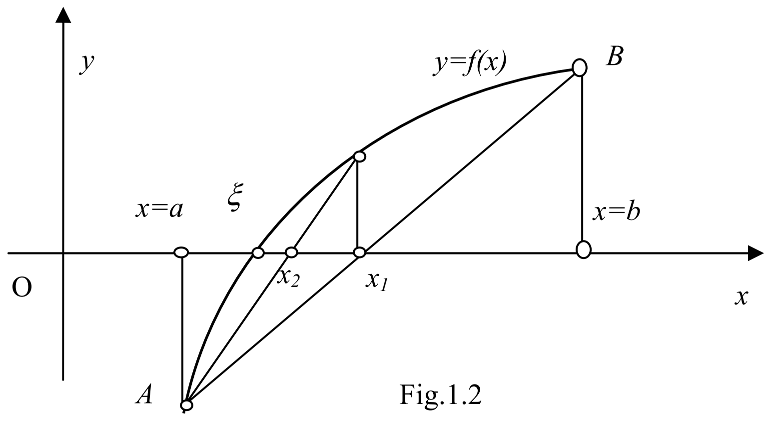


Fig.1.2

În primă fază, se poate aproxima rădăcina ecuației *f(x)=0* cu puncul de intersecție cu axa Ox a dreptei care trece prin punctele *A(a, f(a))* şi *B(b, f(b))* de ecuație:

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a} \quad \Leftrightarrow \quad y-f(a)=(x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (1.3)$$

Punctul de intersecție al dreptei cu axa Ox se obține introducând condiția *y=0* în ecuația (1.3). Se obține:

$$x_1=a-f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} \qquad (1.4)$$

Din figura 1.3 rezultă că noul subinterval al rădăcinii ξ este (a, x_1) deoarece $f(a)\cdot f(x_1)<0$. În continuare algoritmul se repetă.

Presupunem că ultimul subinterval pentru care funcția îşi modifică semnul este (x_{n-1}, x_n), adică este îndeplinită condiția: $f(x_{n-1})\cdot f(x_n)<0$ (1.5)

Ținând seama de relația (1.4) se poate scrie următoarea *relație de recurență a metodei coardei sau secantei:*

$$x_{n+1}=x_n-f(x_n)\frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})} \qquad (1.6)$$

Aplicația 1.2

Folosind metoda coardei să se determine rădăcina ecuației algebrice: $ln\,x+3x^2-4x-1=0$, cu o eroare $\varepsilon < 10^{-5}$ (cu cinci zecimale exacte) ştiind că se află în intervalul $[1, 2]$.

Rezolvare

Pentru calculul soluției ecuației se aplică relația de recurență (1.6) care conduce la obținerea valorilor din tabelul 1.3.

Tabelul 1.3

Pas	x_{n-1}	x_{n+1}	x_n	$f(x_{n-1})$	$f(x_{n+1})$	$f(x_n)$	*Eroarea* ε
1	1.000000	1.351300	2	-2.000000	-0.626100	3.693147	
2	1.351300	1.445332	2	-0.626100	-0.146033	3.693147	0,09432
3	1.445332	1.466431	2	-0.146033	-0.031635	3.693147	0,021099
4	1.466431	1.470962	2	-0.031635	-0.006742	3.693147	0,004531
5	1.470962	1.471926	2	-0.006742	-0.001432	3.693147	0,000964
6	1.471926	1.472131	2	-0.001432	-0.000304	3.693147	0,000205
7	1.472131	1.472174	2	-0.000304	-0.000064	3.693147	0,000043
8	1.472174	1.472184	2	-0.000064	-0.000014	3.693147	0,000010
9	1.472184	1.472186	2	-0.000014	-0.0000007	3.693147	0,000002
10	1.472186	1.472188	2	-0.0000007	0,00001	3.693147	0,000002

Metoda coardei este *slab convergentă*. Soluția aproximativă a ecuației calculată cu o eroare $\varepsilon = 10^{-5}$ în zece paşi este: ξ*=1,472184.*

1.3. Metoda tangentelor de ordinul I a lui Newton (Newton-Raphson)

Metoda tangentelor de ordinul I a lui Newton este o metodă ce permite calculul aproximativ al soluţiei unei ecuaţii algebrice $f(x)=0$ cu ajutorul tangentei la graficul funcţiei $f(x)$ în punctul x_n.

Se consideră funcţia $f(x)$ care îndeplineşte următoarele condiţii: este continuă şi derivabilă pe intervalul [a, b], îşi schimbă semnul: $f(a)\cdot f(b)<0$, este strict monotonă ($f'(x) >0$ sau $f'(x) <0$) şi graficul ei nu admite nici un punct de inflexiune pe intervalul [a, b]: $f''(x)\neq 0$. În aceste condiţii funcţia admite o singură rădăcină în intervalul [a, b] şi se poate aplica metoda tangentelor de ordinul I a lui Newton. Prin dezvoltarea în *serie Taylor* a funcţiei $f(x)$ în jurul punctului $x=a$ se obţine:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a)+\ldots \tag{1.7}$$

Reţinând doar primii doi termeni ai acestei dezvoltări, se obţine ecuaţia unei drepte care reprezintă tangenta la graficul funcţiei în punctul A, aşa cum rezultă şi din figura 1.3:

$$y_1=f(a)+(x-a)f'(a) \tag{1.8}$$

Dacă în ecuaţia (1.8) se pune condiţia $y_1=0$, se obţine punctul de intersecţie al tangentei cu axa Ox:

$$x_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)} \tag{1.9}$$

Prin dezvoltarea în *serie Taylor* a funcţiei $f(x)$ în jurul punctului $x=b$ şi reţinerea primilor doi termeni se obţine tangenta la graficul lui $f(x)$ în punctul B, care intersectează axa Ox în piunctul x_2 (fig. 1.3):

$$x_2=b-\frac{f(b)}{f'(b)} \tag{1.10}$$

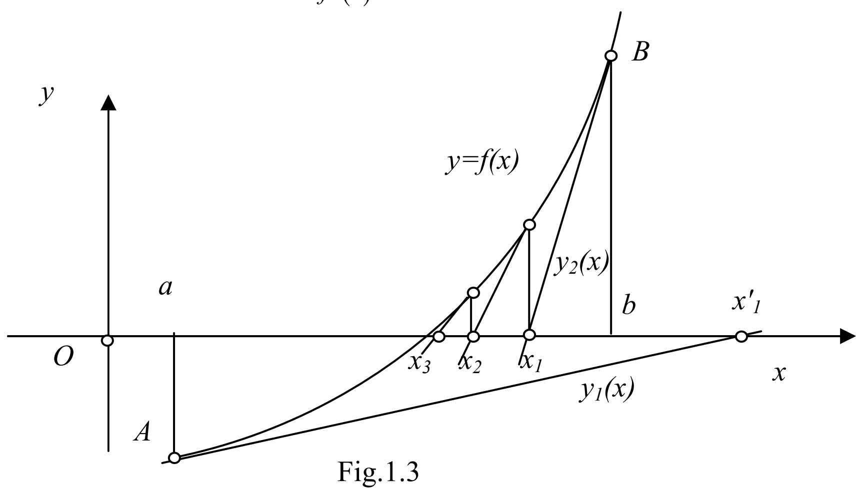


Fig.1.3

Ținând seama de relațiile (1.9) şi (1.10) rezultă formula de recurență a *metodei tangentelor de ordinul I a lui Newton (Newton-Raphson):*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (1.11)$$

Observații

1. Alegera puncului de start pentru aplicarea metodei tangentelor este importantă întrucât soluțiile corespunzătoare celor *n* iterații trebuie să fie convergente către soluția exactă, adică în interiorul intervalului (*a, b*). Se observă din figura 1.3 că valorile x_1 x_2 ,... corespunzătoare punctului de start $x=b$ se află în interiorul intervalului în timp ce prima valoare x'_1 corespunzătoare punctului de start $x=a$ se află în afara lui.

2. Dacă prima derivată a funcției se anulează în interiorul intervalului (*a, b*), (sau nu este strict pozitivă sau negativă) metoda nu este convergentă aşa cum se poate observa în exemplul din figura 1.4.

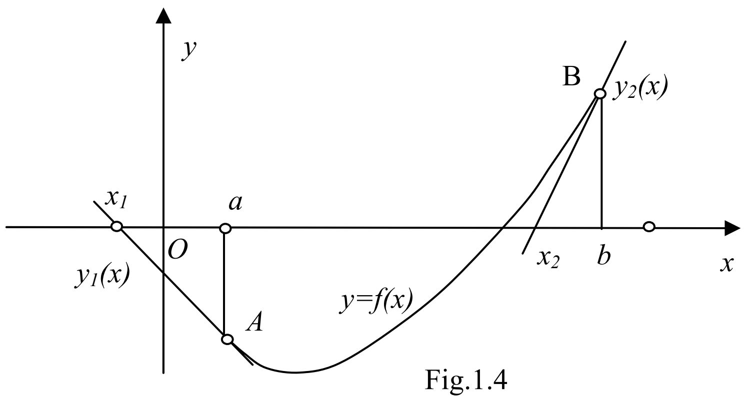


Fig.1.4

3. În cazul în care a doua derivată a funcției se anulează în interiorul intervalului (*a, b*), graficul funcției admite un punct de inflexiune în interiorul intervalului (a, b) şi metoda nu este convergentă aşa cum se poate observa în exemplul din figura 1.4.

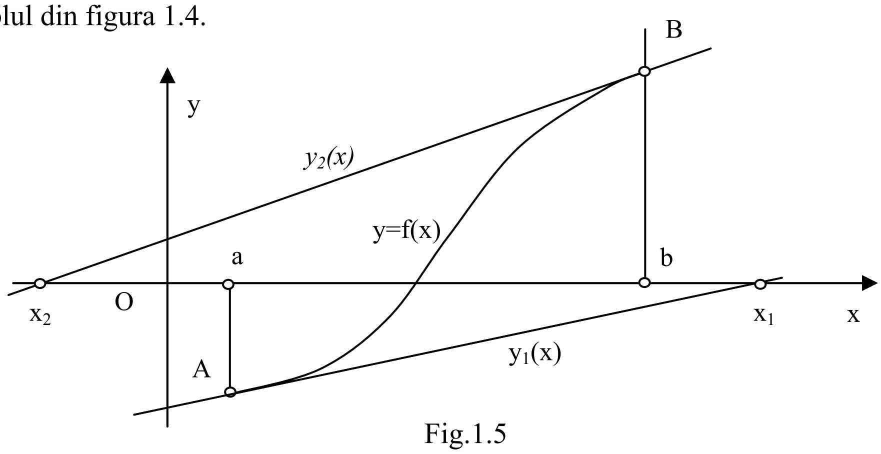


Fig.1.5

Aplicația 1.3

Folosind metoda tangentelor de ordinul I a lui Newton să se determine rădăcina ecuației algebrice: $ln\,x + 3x^2 - 4x - 1 = 0$, cu o eroare ε<$10^{-5}$ (cu şase zecimale, ultima fiind rotunjită) ştiind că se află în intervalul $[1, 2]$.

Rezolvare

Notând $f(x) = ln\,x + 3x^2 - 4x - 1$, atunci derivatele lui *f(x)* sunt:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 6x - 4 \quad si \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} + 6 \tag{1.12}$$

Se observă că în intervalul [1, 2] sunt îndeplinite condițiile cerute:

$$f'(x) > 0 \quad si \quad f''(x) \neq 0 \tag{1.13}$$

Pentru determinarea soluției aproximative se aplică relația de recurență (1.11) luând ca punct de start *x=2*, obținându-se valorile din tabelul 1.4.

Tabelul 1.4

Pas	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}	$f(x_{n+1})$	*Eroarea* ε
1.	2	3.693147	8.5	1.565512	0.538649	0,434488
2.	1.565512	0.538649	6.031841	1.476211	0.022232	0,089301
3.	1.476211	0.022232	5.534677	1.472194	4.47E-05	0,004017
4.	1.472194	4.47E-05	5.512424	1.472186	1.82E-10	0,000008

Se observă din tabelul 1.4 că această metodă este *rapid convergentă.* Soluția aproximativă a ecuației calculată cu şase zecimale exacte este ξ=1,472184.

1.4. Metoda tangentelor de ordinul II a lui Newton

Se consideră funcția *f(x)* care îndeplineşte următoarele condiții: este continuă şi derivabilă pe intervalul [*a, b*], îşi schimbă semnul: $f(a) \cdot f(b) < 0$, este strict monotonă (*f'(x) >0* sau *f'(x) <0*) şi graficul ei nu admite nici un punct de inflexiune pe intervalul [*a, b*]: *f''(x)≠0.* În aceste condiții funcția admite o singură rădăcină în intervalul [*a, b*] şi se poate aplica metoda tangentelor de ordinul II a lui Newton. Prin dezvoltarea (1.7) în *serie Taylor* a funcției *f(x)* în jurul punctului *x=a* se rețin doar primii doi termeni ai acestei dezvoltări, se obține ecuația unei parabole

$$y = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) \tag{1.14}$$

Se observă din relația (1.14) că funcția *y(x)* trece prin punctul *A(a, f(a))* şi are aceeaşi derivate cu *f(x)* în punctul *x=a:* $y'(a) = f'(a)$ respectiv $y''(a) = f''(a)$:

Punând condiția $y = 0$ în ecuația (1.14), se obține ecuația:

$$f(a) + (x-a)\left[f'(a) + \frac{(x-a)}{2!} f''(a) \right] = 0 \tag{1.15}$$

Înlocuind expresia (*x-a*) din interiorul parantezei drepte cu expresia obținută în cadrul metodei Newton Raphson:

$$x - a = -\frac{f(a)}{f'(a)} \tag{1.16}$$

se obține ecuația: $$f(a) + (x-a)\left[f'(a) - \frac{1}{2}\frac{f(a)}{f'(a)}f''(a)\right] = 0 \tag{1.17}$$

Soluția ecuației (1.17) este dată de relația:

$$x = a - \frac{1}{\frac{f'(a)}{f(a)} - \frac{f''(a)}{2 \cdot f'(a)}} \tag{1.18}$$

Dacă aceată soluție este în afara intervalului () atunci se schimbă punctul de start al metodei în $x=b$, ca la metoda tangentelor de ordinul I:

$$x = b - \frac{1}{\frac{f'(b)}{f(b)} - \frac{f''(b)}{2 \cdot f'(b)}} \tag{1.19}$$

Ținând seama de relațiile (1.18) şi (1.19) se deduce *relația de recurență a metodei tangentelor de ordinul II a lui Newton:*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{\frac{f'(x_n)}{f(x_n)} - \frac{f''(x_n)}{2 \cdot f'(x_n)}} \tag{1.20}$$

Aplicația 1.4

Folosind metoda tangentelor de ordinul II a lui Newton să se determine rădăcina ecuației algebrice $ln\,x + 3x^2 - 4x - 1 = 0$ cu o eroare $\varepsilon<10^{-5}$ (cu şase zecimale, ultima fiind rotunjită) ştiind că se află în intervalul $[1, 2]$.

Rezolvare

Pentru a determina rădăcina ecuației $f(x)=0$ prin metoda tangentelor de ordinul II a lui Newton se observă că sunt îndeplinite condițiile cerute şi ținând seama de relația (1.12) se aplică relația de recurență (1.20) obținându-se valorile din tabelul 1.5.

Tabelul 1.5

Pas	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f''(x_n)$	x_{n+1}	$f(x_{n+1})$	*Eroarea ε*
1	2	3.693147	8.5	5.75	1.49066	0.10278	
2	1.49066	0.10278	5.614803	5.549969	1.472188	7.93E-06	0.018472
3	1.472188	7.93E-06	5.512387	5.538604	1.472186	0	0.000002

Se observă că această metodă este *rapid convergentă.*

S-a calculat soluția ecuației cu o eroare $\varepsilon<10^{-5}$.

1.5. Metoda iterativă *x=g(x)*

Fie o funcție *f(x)* continuă şi derivabilă pe intervalul [*a, b*], strict monotonă, care îndeplineşte condiția $f(a)\cdot f(b)<0$. Dacă ecuația *f(x)=0* are o singură rădăcină $\xi \in (a,b)$ şi se poate scrie sub forma echivalentă:

$$x=g(x) \tag{1.21}$$

unde *g(x)* este o funcție continuă în intervalul *(a,b)* .

Dacă şirul format cu ajutorul relației (1.21) sub forma relației de recurență:

$$x_{n+1}=g(x_n) \tag{1.22}$$

este convergent, atunci limita acestui şir este tocmai rădăcina ecuației *f(x)=0*

Rlația (1.22) reprezintă formula de recurență a metodei *x=g(x)* .

În figura 1.6 sunt prezentate două moduri de obținere grafică a soluțiilor ecuației $f(x)=e^x-5x=0$ care corespund metodei *x=g(x)*: în prima reprezentare se obțin soluțiile ecuației *f(x)=0*, iar în a doua soluțiile ecuației echivalente: $x=e^x/5$.

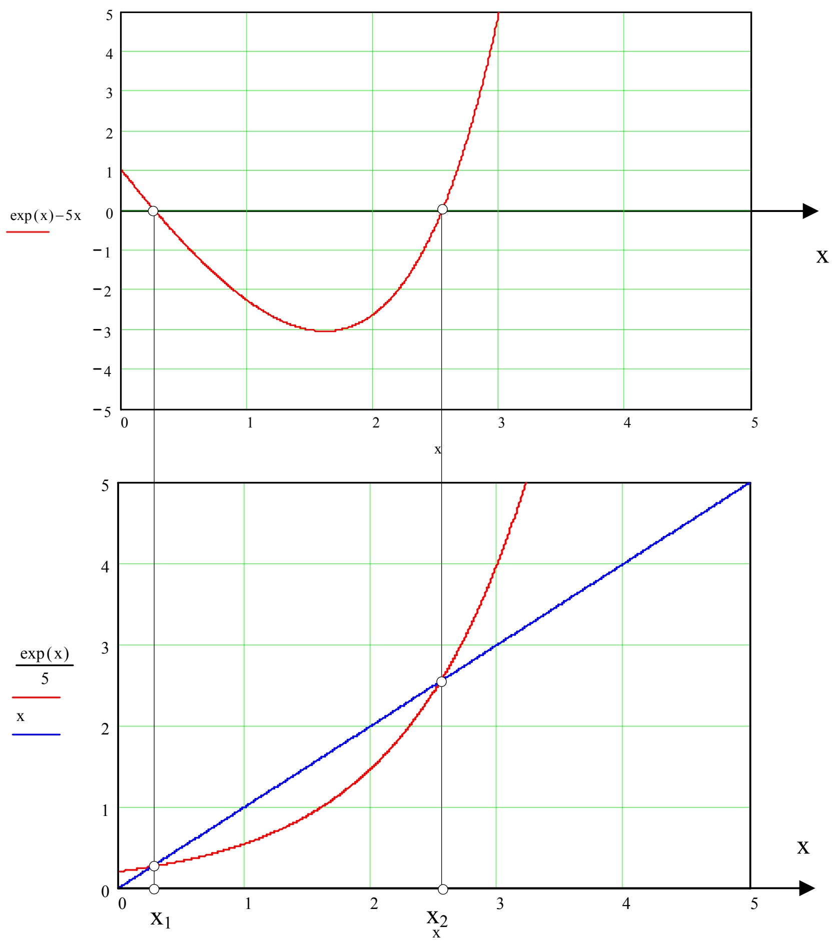


Fig.1.6

Aplicația 1.5

Folosind metoda iterativă pentru ecuații de forma $x=g(x)$ să se găsească rădăcina ecuației: $3x^4+4x-1=0$, cu o eroare $\varepsilon<10^{-5}$ (cu şase zecimale, ultima fiind rotunjită) ştiind că această rădăcină se află în intervalul $(0, 1)$.

Rezolvare

Ecuația de mai sus se mai scrie sub forma echivalentă $x=g(x)$ astfel:

$$3x^4+4x-1=0 \;\Leftrightarrow\; x(3x^3+4)=1 \;\Leftrightarrow\; x=\frac{1}{3x^3+4} \quad (1.23)$$

Relația de recurență (1.22) pentru acest caz se scrie astfel:

$$x_{n+1}=\frac{1}{3x_n^3+4} \quad (1.24)$$

Plecând de la $x_1=0$ şi înlocuind în (1.24) se obțin valorile din tabelul 1.6.

Tabelul 1.6

Pas	x_n	x_{n+1}	*Eroarea* ε
1	0	0,25	0,25
2	0,25	0,2471	0,0029
3	0,2471	0,2472	0,0001
4	0,2472	0,247199	0,000001

Plecând de la $x'_1=1$ şi înlocuind în (1.24) se obțin valorile din tabelul 1.7

Tabelul 1.7

Pas	x_n	x_{n+1}	*Eroarea* ε
1	1	0,142857	0,857143
2	0,142857	0,249454	0,106597
3	0,247123	0,247202	0,002252
4	0,247202	0,247199	0,0000027

Se observă că pentru acest caz metoda este convergentă. O soluție aproximativă a ecuației calculată cu o eroare $\varepsilon<10^{-5}$ este $\xi=0,247199$.

Aplicația 1.6

Să se găsească rădăcina ecuației: $x^4-x-1=0$ cu o eroare $\varepsilon< 10^{-5}$, ştiind că se află în intervalul $(1, 2)$.

Rezolvare

Ecuația $x^4-x-1=0$ se mai scrie sub forma echivalentă $x=g(x)$ astfel:

$$x^4=x+1 \quad \text{sau:} \quad x=\sqrt[4]{1+x} \quad (1.25)$$

Relație de recurență corespunzătoare este:

$$x_{n+1}=\sqrt[4]{1+x_n} \quad (1.26)$$

Plecând de la $x_1=1$ şi înlocuind în (1.26) se obțin valorile din tabelul 1.8.

Tabelul 1.8

Pas	x_n	x_{n+1}	*Eroarea ε*
1	1	1,1892	
2	1,1892	1,21638	0,02718
3	1,21638	1,220145	0,003765
4	1,220145	1,220660	0,000515
5	1,220660	1,220733	0,000073
6	1,220733	1,220742	0,000009
7	1,220742	1,220744	0,000001

Se observă că pentru acest caz metoda este slab convergentă. O soluție aproximativă a ecuației calculată cu o eroare $\varepsilon<10^{-5}$ este: $\xi=1,220744$.

1.6. Metoda tangentelor de ordinul I a lui Newton pentru extragerea rădăcinii dintr-un număr pozitiv

Rădăcina de ordinul *k* dintr-un număr pozitiv *N*: $x=\sqrt[k]{N}$ este echivalentă cu soluția ecuației: $f(x)=x^k-N=0$ (1.27)

Folosind relația de recurență (1.11) de la metoda tangentelor de ordinul I a lui Newton în care se înlocuieşte derivata: $f'(x)=kx^{k-1}$, se obține următoarea relație de recurență pentru calculul rădăcinii de ordinul *k* dintr-un număr *N*:

$$x_{n+1}=\frac{(k-1)x_n^k+N}{kx_n^{k-1}} \quad sau \quad x_{n+1}=\frac{1}{k}\left[(k-1)x_n+\frac{N}{x_n^{k-1}}\right] \qquad (1.28)$$

Aplicația 1.7

Folosind relația de recurență (1.28) să se calculeze $\sqrt[7]{5}$ ($k=7$, $N=5$) cu o eroare $\varepsilon<10^{-5}$.

Rezolvare

Înlocuind $k=7$ şi $N=5$ în relația (1.28) se obține relația de recurență:

$$x_{n+1}=\frac{1}{7}\left[6x_n+\frac{5}{x_n^6}\right] \qquad (1.29)$$

Dacă se consideră ca punct de start $x_1=1$ se obțin valorile din tabelul 1.9.

Tabelul 1.9

Pas	x_n	x_{n+1}	*Eroarea ε*
1	1	1,571428	
2	1,571428	1,39437	0,176858
3	1,39437	1,292360	0,102077
4	1,292360	1,261000	0,03136
5	1,261000	1,258514	0,002486
6.	1,258514	1,2584989	0,000015

Se observă că metoda este convergentă. După şase paşi se obţine se obţine valoarea aproximativă a rădăcinii $x=1,258514$ cu o eroare $\varepsilon<10^{-5}$.

1.7. Metoda tangentelor de ordinul II a lui Newton pentru extragerea rădăcinii dintr-un număr pozitiv

Ca şi în cazul precedent rădăcina $x=\sqrt[k]{N}$ este echivalentă cu soluţia ecuaţiei: $x^k - N = 0$. Folosind relaţia de recurenţă (1.20) de la metoda tangentelor de ordinul II a lui Newton şi înlocuind expresiile primei şi celei de a doua derivate a funcţiei $f(x)=x^k - N$:

$$f'(x)=kx^{k-1};\ f''(x)=k(k-1)x^{k-2} \qquad (1.30)$$

se obţine următoarea relaţie de recurenţă pentru calculul rădăcinii de ordinul k dintr-un număr N:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n\left(x_n^k - N\right)}{(k+1)x_n^k + (k-1)N} \qquad (1.31)$$

sau:

$$x_{n+1} = x_n \frac{(k-1)x_n^k + (k+1)N}{(k+1)x_n^k + (k-1)N} \qquad (1.32)$$

Aplicaţia 1.8

Folosind relaţia de recurenţă (1.28) să se calculeze $\sqrt[7]{5}$ cu o eroare $\varepsilon<10^{-7}$.

Rezolvare

Înlocuind $k=7$ şi $N=5$ în relaţia (1.28) se obţine relaţia de recurenţă:

$$x_{n+1} = x_n \cdot \frac{3x_n^7 + 20}{4x_n^7 + 15} \qquad (1.33)$$

Dacă se consideră ca punct de start $x_1=1$ se obţin valorile din tabelul 1.10.

Tabelul 1.10

Pas	x_n	x_{n+1}	*Eroarea*
1	1	1,210526	
2	1,210526	1,258205	0,047679
3	1,258205	1,2584989	0,0002939
4	1,2584989	1,2584989	0

Se observă că metoda este rapid convergentă. După patru paşi se obţine o valoarea aproximativă a rădăcinii cu o eroare de $\varepsilon<10^{-7}$: $x = 1,2584989$.

2. METODE NUMERICE DE REZOLVARE A SISTEMELOR DE ECUAȚII LINIARE

Sistemele de ecuații liniare este unul dintre domeniile matematicii în care metodele numerice şi utilizarea calculatorului şi-au dovedit din plin utilitatea. La rezolvarea unor sisteme liniare de ecuații (cum ar fi cele care apar la metoda elementelor finite) se folosesc diferite metode care au ca scop reducerea numărului de operații elementare în raport cu cele corespunzătoare metodei clasice de rezolvare folosind regula lui Cramer, adică reducerea numărului de date din memoria calculatorului, scurtarea timpului efectiv de calcul şi nu în ultimul rând reducerea erorilor de calcul. Metodele folosite în prezent pentru rezolvarea sistemelor de ecuații liniare sunt de două feluri:

a. *Metode de eliminare (Gauss, Gauss-Jordan, Choleski, etc);*

b. *Metode iterative (Gauss-Seidel, Jacobi, etc)*

2.1. Metoda eliminării succesive Gauss

Metoda Gauss constă în eliminarea succesivă a necunoscutelor din ecuațiile sistemului printr-un algoritm destul de simplu, în final obținându-se un număr de operații mult mai redus decât în cazul în care se foloseşte regula lui Cramer (unde calculul determinanților implică un număr foarte mare de operații). Se consideră sistemul liniar de *n* ecuații cu *n* necunoscute :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2.1)$$

Sistemul (2.1) se mai poate scrie sub forma matriceală astfel:

$$[A]\ \{X\} = \{B\} \qquad (2.2)$$

unde: $[A]$ reprezintă matricea coeficienților necunoscutelor sistemului, o matrice pătratică nesingulară (det $[A] \neq 0$), având elementele a_{ij}, $i, j=1,2, ... n$;

$\{X\} = \{x_1\ \ x_2\ \ x_3\ ...\ x_n\ \}^T$ matricea coloană a necunoscutelor ;

$\{B\} = \{b_1\ \ b_2\ \ b_3\ ...\ b_n\ \}^T$ matricea coloană a termenilor liberi.

Prin metoda Gauss se urmăreşte obţinerea de termeni nuli în matricea sistemului [A], prin anumite operaţii elementare efectuate simultan asupra liniilor matricelor [A] şi {B} şi anume între linia de pivotare şi liniile situate sub această linie, în final obţinându-se o matrice de forma:

$$[A]^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{22}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & a_{3n}^{(3)} \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

Metoda Gauss constă dintr-un algoritm format din n paşi:

Pasul 1: Se elimină necunoscuta x_1 din ecuaţiile *2, 3, ..., n* ale sistemului (2.1) adică se anulează primele elemente ale liniilor *2, 3, ..., n* din matricea [A]. Presupunând că $a_{11} \neq 0$, linia 1 se numeşte *linie de pivotare*. Se caută ca valoarea absolută a primului element al liniei de pivotare să fie cât mai mare. În cazul în care $a_{11}= 0$ sau are o valoare absolută foarte mică, se schimbă poziţia liniei *1* cu cea corespunzătoare liniei i având valoarea absolută a primului element a_{1i} cea mai mare. Se împart elementele linieu *1* a matricelor [A] şi {B} la a_{11} obţinându-se:

$$a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \qquad j = 1,2,...,n; \qquad b_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}} \qquad (2.4)$$

Se scad liniile i situate sub linia de pivotare din linia *1* multiplică cu primele elementele ale acestor linii: a_{i1}, $i = 2,3,...,n$ obţinându-se:

$$a_{i1}^{(1)} = 0; \quad a_{ij}^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}}{a_{11}}, \quad b_i^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{i1} & b_i \end{vmatrix}}{a_{11}}, \quad i, j \geq 2 \qquad (2.4')$$

După primul pas se obţine sistemul echivalent de ecuaţii:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + ... + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \quad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \quad a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + ... + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)} \\ \quad .... \\ \quad a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + ... + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases} \qquad (2.5)$$

Pasul 2: Linia *1* nu se modifică. Se procedează analog ca la ***pasul 1*** cu ecuaţiile *2, 3, ..., n* anulând primele două elemente ale liniilor *3,4,, ..., n* din matricea [A]. Presupunând că $a^{(1)}_{22} \neq 0$, linia a doua este linie de pivotare. Se împarte linia 2 la coeficientul lui $a_{22}^{(1)}$ şi se scad liniile i situate sub noua linie de pivotare din linia *2* multiplică cu primele elementele ale acestor linii obţinându-se:

$$a_{2j}^{(2)} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \qquad j = 2,...,n; \qquad b_1^{(2)} = \frac{b_1^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \tag{2.6}$$

➢ $$a_{i2}^{(2)} = 0; \quad a_{ij}^{(2)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{2j}^{(1)} \\ a_{i2}^{(1)} & a_{ij}^{(1)} \end{vmatrix}}{a_{22}^{(1)}}; \quad b_i^{(2)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{22}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ a_{i2}^{(1)} & b_i^{(1)} \end{vmatrix}}{a_{22}^{(1)}}, \qquad i,j \geq 3 \tag{2.6'}$$

După cel de al doilea pas se obține sistemul echivalent de ecuații:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + ... + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)} \\ x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + ... + a_{2n}^{(2)} x_n = b_2^{(2)} \\ a_{33}^{(2)} x_3 + ... + a_{3n}^{(2)} x_n = b_3^{(2)} \\ .... \\ a_{n3}^{(2)} x_3 + ... + a_{nn}^{(2)} x_n = b_n^{(2)} \end{cases} \tag{2.7}$$

. . . .

Procedeul se repetă pentru celelalte linii de pivotare *3,4,5,...,n* , astfel încât după ***n pași*** se ajunge la sistemul echivalent de ecuații:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \quad ... \quad + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)} \\ x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \quad ... \quad + a_{2n}^{(2)} x_n = b_2^{(2)} \\ ... \\ x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)} x_n = b_{n-1}^{(n-1)} \\ x_n = b_n^{(n)} \end{cases} \tag{2.8}$$

Necunoscutele x_1, x_2, $...x_n$ se determină prin *substituție,* pornind de la ultima ecuație și apoi succesiv până la prima ecuație obținânduse:

$$\begin{cases} x_n = b_n^{(n)}; \\ x_{n-1} = b_{n-1}^{(n-1)} - a_{n-1,n}^{(n-1)} \cdot x_n; \\ ... \\ x_1 = b_1^{(1)} - \sum_{k=2}^{n} a_{1k}^{(1)} \cdot x_k \end{cases} \tag{2.9}$$

Aplicația 2.1

Folosind metoda Gauss să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -2 \end{cases} \quad (2.10)$$

Matricea sistemului [A] şi maricea coloană a termenilor liberi [B] se scriu:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}; \qquad \{B\} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \\ -2 \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

Pasul 1: Coeficienții se determină cu ajutorul relațiilor (2.4) şi (2.4').

După pasul 1 se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -2 \\ -3x_2 - 2x_4 = -5 \end{cases} \quad (2.12)$$

Pasul 2: Ecuația 1 nu se modifică. Coeficienții se determină cu ajutorul relațiilor (2.6) şi (2.6'). După pasul 2 se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_2 + 0{,}5x_3 = 1 \\ 1{,}5x_3 - 3x_4 = -3 \\ 1{,}5x_3 - 2x_4 = -2 \end{cases} \quad (2.13)$$

Pasul 3: Ecuațiile 1 şi 2 nu se modifică.

După pasul 3 se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_2 + 0{,}5x_3 = 1 \\ x_3 - 2x_4 = -2 \\ x_4 = 1 \end{cases} \quad (2.14)$$

Soluția acestui sistem se obține imediat prin retrosubstituție (începând cu ultima ecuație a sistemului de ecuații şi încheind cu prima):

$$x_4 = 1; \ x_3 = 0; \ x_2 = 1; \ x_1 = 0. \quad (2.15)$$

2.2. Metoda Gauss în cazul sistemelor de ecuații liniare cu matrice bandă şi simetrică

Dacă matricea pătratică [*A*] a sistemului de ecuații (2.1.1) are coeficienții simetrici față de prima diagonală, adică: $a_{ij}= a_{ji},\ i\neq j,\quad i, j = 1, 2, 3, ..., n$ spunem că aceasta este o *matrice simetrică.* În plus, când coeficienții $a_{ij},\ i, j = 1, 2, 3, ..., n,$ situați de o parte şi cealaltă față de prima diagonală a matricei pătratice [*A*] iau valori nenule (sau nu toate nule), adică $a_{ij}\neq 0$ pentru:

$$i = max(1,\ k - l_{sband} + 1), ..., min(n,\ k + l_{sband} - 1)$$
$$j = max(1,\ k - l_{sband} + 1), ..., min(n,\ k + l_{sband} - 1)$$

unde: $l_{sband}\in \{1, 2, 3, ..., n\}$ este lățimea de semibandă, $k=1, 2, 3, ..., n,$

iar toate celelalte valori ale coeficienților a_{ij} sunt nule, atunci spunem că matricea pătratică [*A*] este o *matrice bandă şi simetrică.*

Fie matricea bandă şi simetrică:

$$[A]=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 9 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -7 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix} \qquad (2.16)$$

Se extrage din matricea [*A*] matricea dreptunghiulară [*S*] corespunzătoare unei semibande a matricei [*A*] care are lățimea $l_{sband} =3$:

$$[S]=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 \\ 9 & -7 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.17)$$

Dacă dimensiunile matricei [*A*] sunt foarte mari, metoda Gauss poate fi îmbunătățită pentru cazurile particulare de matrice prezentate mai sus astfel:

- pentru matricea *simetrică* $[A]_{n\times n}$ este suficientă reținerea unui număr de valori:

$$N = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (2.18)$$

- pentru matricea $[A]_{n\times n}$ *bandă şi simetrică* având lățimea de semibandă l_{band}, este suficientă reținerea unui număr de valori: $N' = n\times l_{band}$ (2.19)

Acest lucru se justifică astfel: în cazul matricelor bandă şi simetrice, folosind metoda Gauss, la pasul 1 sunt necesare numai primele l_{band} ecuații (deoarece coeficienții lui x_1 corespunzători liniilor $l_{band}+1, ..., n,$ sunt deja nuli). Pentru ceilalți n paşi sunt necesare de asemenea doar primele l_{band} ecuații. În consecință, pentru fiecare pas este suficientă reținerea unui număr de l^2_{band} elemente din matricea bandă [S] şi a unui număr de l_{band} elemente din matricea [B], numărul de total de elemente se reduce astfel de la: n^2+n la $l_{band}^2+l_{band}$.

De exemplu, pentru o matrice bandă şi simetrică $[A]_{n\times n}$, $n=1000$, având lățimea de semibandă: l_{band}=50, sunt necesare:

- prin metoda eliminării a lui Gauss obişnuită : $n^2+n=1001000$ valori;
- prin metoda eliminării a lui Gauss îmbunătățită $l_{band}^2+l_{band}=2550$ valori.

Rezultă în acest caz o reducere a numărului total de elemente :

$$E=\frac{1001000-2550}{1001000}=99{,}74\% \tag{2.20}$$

Aplicația 2.2

Folosind metoda Gauss îmbunătățită pentru sisteme cu matrice bandă şi simetrică să se rezolve următorul sistem de ecuații liniare:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3 = 14 \\ 2x_1+2x_2+x_3+3x_4 = 21 \\ 3x_1+x_2+2x_3+x_4+3x_5 = 30 \\ 3x_2+x_3+4x_4+2x_5 = 35 \\ 3x_3+2x_4+5x_5 = 42 \end{cases} \tag{2.21}$$

Matricea sistemului [A] este o matrice bandă şi simetrică având $l_{band}=3$:

$$[A]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix},\ [B]=\begin{Bmatrix} 14 \\ 21 \\ 30 \\ 35 \\ 42 \end{Bmatrix} \tag{2.22}$$

În calcule se va folosi matricea dreptunghiulară corespunzătoare lui [A]:

$$[S]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

Aplicând algoritmul de eliminare al metodei Gauss şi ținând seama de faptul că matricea [A] este simetrică, iar în matricea [S] toate elementele situate pe

linia *i* au fost permutate la stânga cu *i-1* unități, se calculează elementele matricelor [*S*] şi {*B*} cu ajutorul următoarelor relații:

Pasul 1: Se află noii coeficienți ai matricei dreptunghiulare [*S*] şi matricei coloană {*B*} folosind relațiile:

$$s_{1j}^{(1)} = \frac{s_{1j}}{s_{11}}, \qquad j = 1,2,\ldots,l_{band}; \qquad b_1^{(1)} = \frac{b_1}{s_{11}}$$

$$s_{ij}^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} s_{11} & s_{1,j+i-1} \\ s_{i1} & s_{ij} \end{vmatrix}}{s_{11}}, \qquad b_i^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} s_{11} & b_1 \\ s_{i1} & b_i \end{vmatrix}}{s_{11}}, \tag{2.24}$$

$$i = 2, 3, \ldots, l_{band}; \quad j = 1, 2, 3, \ldots, l_{band} - i + 1$$

Înlocuind se obțin rezultatele:

$$s_{11}^{(1)} = \frac{s_{11}}{s_{11}} = \frac{1}{1} = 1; \; s_{12}^{(1)} = \frac{s_{12}}{s_{11}} = \frac{2}{1} = 2; \; s_{13}^{(1)} = \frac{s_{13}}{s_{11}} = \frac{3}{1} = 3; \; b_1^{(1)} = \frac{b_1}{s_{11}} = \frac{14}{1} = 14;$$

$$\begin{gathered} s_{21}^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{1} = -2; \quad s_{22}^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -5; \quad b_2^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 14 \\ 2 & 21 \end{vmatrix}}{1} = -7; \\ s_{31}^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{1} = -7; \quad b_2^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 14 \\ 3 & 30 \end{vmatrix}}{1} = -12; \end{gathered} \tag{2.25}$$

După pasul 1 se obțin matricele:

$$[S]^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -5 & 3 \\ -7 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \{B\}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 14 \\ -7 \\ -12 \\ 35 \\ 42 \end{Bmatrix} \tag{2.26}$$

Pasul 2: Coeficienții matricelor [*S*] şi {*B*} se află folosind relațiile:

$$s_{2j}^{(2)} = \frac{s_{2j}^{(1)}}{s_{21}^{(1)}}, \qquad j = 1,2,\ldots,l_{band}; \qquad b_2^{(2)} = \frac{b_2^{(1)}}{s_{21}^{(1)}}$$

$$s_{ij}^{(2)} = \frac{\begin{vmatrix} s_{21}^{(1)} & s_{2,i+j-2}^{(1)} \\ s_{2,i-1}^{(1)} & s_{ij}^{(1)} \end{vmatrix}}{s_{21}^{(1)}}, \qquad b_i^{(2)} = \frac{\begin{vmatrix} s_{21}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ s_{2,i-1}^{(1)} & b_i^{(1)} \end{vmatrix}}{s_{21}^{(1)}}. \tag{2.27}$$

$$s_{21}^{(2)} = \frac{s_{21}^{(1)}}{s_{21}^{(1)}} = \frac{-2}{-2} = 1; \; s_{22}^{(2)} = \frac{s_{22}^{(1)}}{s_{21}^{(1)}} = \frac{-5}{-2} = 2{,}5; \; s_{23}^{(2)} = \frac{s_{23}^{(1)}}{s_{21}^{(1)}} = \frac{3}{-2} = -1{,}5; \; b_2^{(2)} = \frac{b_2^{(1)}}{s_{21}^{(1)}} = \frac{-7}{-2} = 3{,}5;$$

$$s_{31}^{(2)} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -5 & -7 \end{vmatrix}}{-2} = 5{,}5; \quad s_{32}^{(2)} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = -6{,}5; \quad b_{3}^{(2)} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -7 \\ -5 & -12 \end{vmatrix}}{-2} = 5{,}5;$$
$$s_{41}^{(2)} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{-2} = 8{,}5; \quad b_{4}^{(2)} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 3 & 35 \end{vmatrix}}{-2} = 24{,}5; \tag{2.28}$$

După pasul 2 se obțin matricele:

$$[S]^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2{,}5 & -1{,}5 \\ 5{,}5 & -6{,}5 & 3 \\ 8{,}5 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad \{B\}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 14 \\ 3{,}5 \\ 5{,}5 \\ 24{,}5 \\ 42 \end{Bmatrix} \tag{2.29}$$

Pasul 3: Coeficienții matricelor [*S*] şi $\{B\}$ se află folosind relațiile:

$$s_{3j}^{(3)} = \frac{s_{3j}^{(2)}}{s_{31}^{(2)}}, \qquad j = 1,2,\ldots,l_{band}; \qquad b_{3}^{(3)} = \frac{b_{3}^{(2)}}{s_{31}^{(2)}}$$

$$s_{ij}^{(3)} = \frac{\begin{vmatrix} s_{31}^{(2)} & s_{3,i+j-3}^{(2)} \\ s_{3,i-2}^{(2)} & s_{ij}^{(2)} \end{vmatrix}}{s_{31}^{(2)}},$$

$$b_{i}^{(3)} = \frac{\begin{vmatrix} s_{31}^{(2)} & b_{3}^{(2)} \\ s_{3,i-2}^{(2)} & b_{i}^{(2)} \end{vmatrix}}{s_{31}^{(2)}}, \quad i = 4,\ \ldots, l_{band} + 2; \tag{2.30}$$

$$j = 1,2,3,\ \ldots, l_{band} - i + 3$$

Înlocuind, se obține:

$$s_{31}^{(3)} = \frac{s_{31}^{(2)}}{s_{31}^{(2)}} = \frac{5{,}5}{5{,}5} = 1; \quad s_{32}^{(3)} = \frac{s_{32}^{(2)}}{s_{31}^{(2)}} = \frac{-6{,}5}{5{,}5} = -\frac{13}{11}; \quad s_{33}^{(3)} = \frac{s_{33}^{(2)}}{s_{31}^{(2)}} = \frac{3}{5{,}5} = \frac{6}{11}; \quad b_{3}^{(3)} = \frac{b_{3}^{(2)}}{s_{31}^{(2)}} = \frac{5{,}5}{5{,}5} = 1;$$

$$s_{31}^{(2)} = \frac{\begin{vmatrix} 5{,}5 & -6{,}5 \\ -6{,}5 & 8{,}5 \end{vmatrix}}{5{,}5} = \frac{9}{11}; \quad s_{32}^{(2)} = \frac{\begin{vmatrix} 5{,}5 & 3 \\ -6{,}5 & 2 \end{vmatrix}}{5{,}5} = \frac{61}{11}; \quad b_{3}^{(2)} = \frac{\begin{vmatrix} 5{,}5 & 5{,}5 \\ -6{,}5 & 24{,}5 \end{vmatrix}}{5{,}5} = 31;$$
$$s_{41}^{(2)} = \frac{\begin{vmatrix} 5{,}5 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{5{,}5} = \frac{37}{11}; \quad b_{4}^{(2)} = \frac{\begin{vmatrix} 5{,}5 & 5{,}5 \\ 3 & 42 \end{vmatrix}}{5{,}5} = 39. \tag{2.31}$$

După pasul 3 se obțin matricele:

$$[S]^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2{,}5 & -1{,}5 \\ 1 & -\frac{13}{11} & \frac{6}{11} \\ \frac{9}{11} & \frac{61}{11} & 0 \\ \frac{37}{11} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad \{B\}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 14 \\ 3{,}5 \\ 1 \\ 31 \\ 39 \end{Bmatrix} \tag{2.32}$$

Pasul 4: Coeficienții matricelor [*S*] şi {*B*} se află astfel:

$$s_{4j}^{(4)} = \frac{s_{4j}^{(3)}}{s_{41}^{(3)}}, \qquad j = 1,2,...,l_{band}; \qquad b_4^{(4)} = \frac{b_4^{(3)}}{s_{41}^{(3)}}$$

$$s_{ij}^{(4)} = \frac{\begin{vmatrix} s_{41}^{(3)} & s_{4,i+j-4}^{(3)} \\ s_{4,i-3}^{(3)} & s_{ij}^{(3)} \end{vmatrix}}{s_{41}^{(3)}},$$

$$b_i^{(4)} = \frac{\begin{vmatrix} s_{41}^{(3)} & b_4^{(3)} \\ s_{4,i-3}^{(3)} & b_i^{(3)} \end{vmatrix}}{s_{41}^{(3)}}, \quad i = 5, ..., l_{band} + 3; \tag{2.33}$$

$$j = 1,2,3, ..., l_{band} - i + 4$$

$$s_{41}^{(4)} = \frac{s_{41}^{(3)}}{s_{41}^{(3)}} = \frac{\frac{9}{11}}{\frac{9}{11}} = 1; \qquad s_{32}^{(3)} = \frac{s_{42}^{(3)}}{s_{41}^{(3)}} = \frac{\frac{61}{11}}{\frac{9}{11}} = \frac{61}{9}; \qquad b_3^{(4)} = \frac{b_3^{(3)}}{s_{41}^{(3)}} = \frac{31}{\frac{9}{11}} = \frac{341}{9}$$

$$s_{51}^{(4)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{9}{11} & \frac{61}{11} \\ \frac{61}{11} & \frac{37}{11} \end{vmatrix}}{\frac{9}{11}} = -\frac{308}{9}; \qquad b_5^{(4)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{9}{11} & 31 \\ \frac{61}{11} & 39 \end{vmatrix}}{\frac{9}{11}} = -\frac{1540}{9}; \tag{2.34}$$

Se obțin noile matrice:

$$[S]^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2{,}5 & -1{,}5 \\ 1 & -\frac{13}{11} & \frac{6}{11} \\ 1 & \frac{61}{9} & 0 \\ -\frac{308}{9} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad \{B\}^{(4)} = \begin{Bmatrix} 14 \\ 3{,}5 \\ 1 \\ \frac{341}{9} \\ -\frac{1540}{9} \end{Bmatrix} \tag{2.35}$$

Pasul 5: Se află coeficienţii matricelor [S] şi {B} folosind relaţiile:

$$s_{5j}^{(5)} = \frac{s_{5j}^{(4)}}{s_{51}^{(3)}}, \qquad j = 1,2,...,l_{band}; \qquad b_5^{(5)} = \frac{b_5^{(4)}}{s_{51}^{(4)}} \tag{2.36}$$

$$s_{51}^{(5)} = 1; \qquad b_5^{(5)} = 5$$

După pasul 5 se obţin matricele:

$$[S]^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2{,}5 & -1{,}5 \\ 1 & -\frac{13}{11} & \frac{6}{11} \\ 1 & \frac{61}{9} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad [B]^{(5)} = \begin{Bmatrix} 14 \\ 3{,}5 \\ 1 \\ \frac{341}{9} \\ 5 \end{Bmatrix} \tag{2.37}$$

În general, pentru determinarea coeficienţilor matricelor [S] şi {B} la pasul *k,* se folosesc relaţiile:

$$s_{kj}^{(k)} = \frac{s_{kj}^{(k-1)}}{s_{k1}^{(k-1)}}, \qquad j = 1,2,...,l_{band}; \qquad b_k^{(k)} = \frac{b_k^{(k-1)}}{s_{k1}^{(k-1)}}$$

$$s_{ij}^{(k)} = \frac{\begin{vmatrix} s_{k1}^{(k-1)} & s_{k,i+j-k}^{(k-1)} \\ s_{k,i-k+1}^{(k-1)} & s_{ij}^{(k-1)} \end{vmatrix}}{s_{41}^{(k-1)}},$$

$$b_i^{(k)} = \frac{\begin{vmatrix} s_{k1}^{(k-1)} & b_k^{(k-1)} \\ s_{k,i-k+1}^{(k-1)} & b_i^{(k-1)} \end{vmatrix}}{s_{k1}^{(k-1)}}, \quad i = k+2, ..., l_{band} + k - 1; \tag{2.38}$$

$$j = 1,2,3, ..., l_{band} - i + k$$

Soluţiile se obţin prin substituţie, începând cu ultima necunoscută x_n şi încheind cu prima, folosind relaţiile:

$$\begin{aligned} & x_n = b_n^{(n)}; \\ & x_{n-1} = b_{n-1}^{(n-1)} - s_{n-1,2}^{(n-1)} \cdot x_n \\ & ... \\ & x_1 = b_1^{(1)} - \sum_{k=2}^{l_{band}} s_{1,k}^{(1)} \cdot x_k \end{aligned} \tag{2.39}$$

Înlocuind valorile date de relaţiile (2.37) se obţine soluţia sistemului:

$$x_5 = 5; \ x_4 = 4; \ x_3 = 3; \ x_2 = 2; \ x_1 = 1 \tag{2.40}$$

2.3. Metoda eliminării succesive Gauss - Jordan

Este o metodă de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare similară cu metoda Gauss în care prin anumite sau combinaţii liniare efectuate între liniile matricei $[A]$ şi $\{B\}$ se obţin elemente nule pentru toate liniile matricei $[A]$ cu excepţia celor situate pe diagonala principală care au valoarea 1. Prin metoda Gauss-Jordan se transformă matricea $[A]$ în matricea unitate $[I]$, iar matricea coloană $\{B\}$ devine matricea soluţiilor sistemului de ecuaţii. Într-adevăr dacă înmulţim la stânga relaţia (2.4) cu matricea $[A]^{-1}$ este demonstrată această afirmaţie:

$$[A]^{-1}[A]\{X\}=[A]^{-1}\{B\} \quad \Leftrightarrow \quad \{X\}=[A]^{-1}\{B\} \tag{2.41}$$

Faţă de metoda Gauss, la metoda Gauss-Jordan numărul de operaţii creşte în prima fază, dar se reduce în faza de substituţie, deoarece necunoscutele se obţin direct fiind elementele matricei $\{B\}$. Se consideră sistemul de ecuaţii liniare:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2.42}$$

Metoda Gauss-Jordan foloseşte următorul algoritm:

Pasul 1: Linia *1* este linie de pivotare iar coeficientul $a_{11} \neq 0$ este pivot:

- se împart elementele liniei *1* la coeficientul a_{11} obţinându-se:

$$a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \qquad j = 1,2,\ldots,n; \qquad b_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}} \tag{2.43}$$

- se scade linia *1* multiplicată cu $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$, $i = 2,3,\ldots,n$, respectiv din ecuaţiile *2, 3, 4, ... n,* obţinându-se noile elemente:

$$a_{i1}^{(1)} = 0; \; a_{ij}^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}}{a_{11}}, \qquad b_i^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{i1} & b_i \end{vmatrix}}{a_{11}}, \quad i,j \geq 2 \tag{2.44}$$

După pasul 1 se obţine sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \quad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \quad a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)} \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases} \tag{2.45}$$

Pasul 2: Linia 2 este noua linie de pivitare, iar coeficientul a_{22} este pivot atât pentru linia *1* cât şi pentru liniile *3,4,5,...n.*

- se împarte ecuaţia *2* la coeficientul a_{22} şi se elimină necunoscuta x_2 din ecuaţiile *1, 3, 4, ... n,* calculându-se noii coeficienţi cu ajutorul relaţiilor:

$$i=2: \qquad a_{2j}^{(2)}=\frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \qquad j=2,...,n; \qquad b_1^{(2)}=\frac{b_1^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \tag{2.46}$$

$$i=1: \qquad a_{1j}^{(2)}=1;\ a_{12}^{(2)}=0;\ a_{1j}^{(2)}=-\frac{\begin{vmatrix} a_{12}^{(1)} & a_{1j}^{(1)} \\ a_{22}^{(1)} & a_{2j}^{(1)} \end{vmatrix}}{a_{22}^{(1)}}, \quad b_1^{(1)}=-\frac{\begin{vmatrix} a_{12}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(1)} & b_2^{(1)} \end{vmatrix}}{a_{22}^{(1)}}, \ j\geq 3 \tag{2.47}$$

$$i=3,4,..,.n: \quad a_{i1}^{(2)}=a_{i2}^{(2)}=0, \quad a_{ij}^{(2)}=\frac{\begin{vmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{2j}^{(1)} \\ a_{i2}^{(1)} & a_{ij}^{(1)} \end{vmatrix}}{a_{22}^{(1)}}, \qquad b_i^{(1)}=\frac{\begin{vmatrix} a_{22}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ a_{i2}^{(1)} & b_i^{(1)} \end{vmatrix}}{a_{22}^{(1)}}, \ j\geq 3 \tag{2.48}$$

După pasul al doilea se obţine sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x_1 + \qquad a_{13}^{(2)}x_3+...+a_{1n}^{(2)}x_n=b_1^{(2)} \\ x_2+a_{23}^{(2)}x_3+...+a_{2n}^{(2)}x_n=b_2^{(2)} \\ a_{33}^{(2)}x_3+...+a_{3n}^{(2)}x_n=b_3^{(2)} \\ .... \\ a_{n3}^{(2)}x_3+...+a_{nn}^{(2)}x_n=b_n^{(2)} \end{cases} \tag{2.49}$$

La paşii 3, 4, 5, ..., n se procedează în mod analog.

În final rezultă sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = b_1^{(n)} \\ \quad x_2 \qquad\quad = b_2^{(n)} \\ \qquad x_3 \qquad = b_3^{(n)} \\ .... \\ \qquad\qquad x_n = b_n^{(n)} \end{cases} \tag{2.50}$$

Se observă că prin metoda *Gauss Jordan* elementele obţinute pentru matricea $\{B\}$ sunt tocmai soluţiile sistemului de ecuaţii.

Aplicația 2.3

Folosind metoda *Gauss-Jordan* să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 12 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 15 \end{cases} \tag{2.51}$$

Matricea sistemului $[A]$ şi matricea coloană a termenilor liberi $\{B\}$ sunt:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}; \qquad \{B\} = \begin{Bmatrix} 12 \\ -3 \\ 8 \\ 15 \end{Bmatrix} \tag{2.52}$$

Pasul 1: Coeficienții se determină cu ajutorul relațiilor (2.1.43), (2.1.44):

$$a_{11}^{(1)} = \frac{a_{11}}{a_{11}} = 1;\ a_{12}^{(1)} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = 2;\ a_{13}^{(1)} = \frac{a_{13}}{a_{11}} = 1;\ a_{14}^{(1)} = \frac{a_{14}}{a_{11}} = 1;\ b_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}} = 12; \tag{2.53}$$

$$a_{21}^{(1)} = 0;\ a_{22}^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -3;\ a_{23}^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -1;\ a_{24}^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{1} = -3;\ b_2^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{1} = -21;$$

$$a_{31}^{(1)} = 0;\ a_{32}^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{1} = -7;\ a_{33}^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -2;\ a_{34}^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -2;\ b_3^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}}{1} = -28;$$

$$a_{41}^{(1)} = 0;\ a_{42}^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -7;\ a_{43}^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{1} = -5;\ a_{44}^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{1} = -1;\ b_4^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 4 & 15 \end{vmatrix}}{1} = -33.$$

După primul pas, matricea sistemului $[A]$ şi matricea coloană {B} devin:

$$[A]^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & -7 & -2 & -2 \\ 0 & -7 & -5 & -1 \end{bmatrix}; \qquad \{B\}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 12 \\ -21 \\ -28 \\ -33 \end{Bmatrix} \tag{2.54}$$

Pasul 2: Coeficienții se determină cu ajutorul relațiilor (2.1.46):

$$a_{11}^{(2)} = 1;\ a_{12}^{(2)} = 0;\ a_{13}^{(2)} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{1}{3};\ a_{14}^{(2)} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}}{-3} = -1;\ b_1^{(2)} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ -3 & -21 \end{vmatrix}}{-3} = -2;$$

$$a_{21}^{(2)} = 0;\quad a_{22}^{(2)} = \frac{a_{22}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = 1;\ a_{23}^{(2)} = \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{1}{3};\quad a_{24}^{(2)} = \frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = 1;\ b_1^{(2)} = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = 7; \tag{2.55}$$

După al doilea pas, matricea sistemului [A] şi matricea coloană {B} devin:

$$[A]^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & 6 \end{bmatrix}; \qquad \{B\}^{(2)} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 7 \\ 21 \\ 16 \end{Bmatrix} \tag{2.56}$$

Pasul 3: Coeficienţii se determină cu ajutorul relaţiilor:

$$a_{11}^{(3)} = 1;\ a_{12}^{(3)} = a_{13}^{(3)} = 0;\ a_{14}^{(3)} = -\frac{\begin{vmatrix} 1/3 & -1 \\ 1/3 & 5 \end{vmatrix}}{1/3} = -6;\ b_1^{(3)} = -\frac{\begin{vmatrix} 1/3 & -2 \\ 1/3 & 21 \end{vmatrix}}{1/3} = -23$$

$$a_{21}^{(3)} = 0;\ a_{22}^{(3)} = 1;\ a_{23}^{(3)} = 0;\ a_{24}^{(3)} = -\frac{\begin{vmatrix} 1/3 & 1 \\ 1/3 & 5 \end{vmatrix}}{1/3} = -4;\ b_2^{(3)} = -\frac{\begin{vmatrix} 1/3 & 7 \\ -8/3 & 21 \end{vmatrix}}{1/3} = -14 \tag{2.57}$$

$$a_{31}^{(3)} = a_{32}^{(3)} = 0;\quad a_{33}^{(3)} = \frac{a_{33}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = 1;\quad a_{34}^{(3)} = \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = 15;\quad b_3^{(3)} = \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = 63;$$

$$a_{41}^{(3)} = a_{42}^{(3)} = a_{43}^{(3)} = 0;\ a_{44}^{(3)} = \frac{\begin{vmatrix} 1/3 & 5 \\ -8/3 & 6 \end{vmatrix}}{1/3} = 46;\quad b_4^{(3)} = \frac{\begin{vmatrix} 1/3 & 21 \\ -8/3 & 16 \end{vmatrix}}{1/3} = 184$$

După al treilea pas, matricea sistemului [A] şi matricea coloană {B} devin:

$$[A]^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 46 \end{bmatrix}; \qquad \{B\}^{(3)} = \begin{Bmatrix} -23 \\ -14 \\ 63 \\ 184 \end{Bmatrix} \tag{2.58}$$

Pasul 4: Coeficienţii se determină cu ajutorul relaţiilor :

$$a_{11}^{(4)} = 1;\ a_{12}^{(4)} = a_{13}^{(4)} = a_{14}^{(4)} = 0;\quad b_1^{(4)} = -\frac{\begin{vmatrix} -6 & -23 \\ 46 & 184 \end{vmatrix}}{46} = 1$$

$$a_{21}^{(4)} = 0;\ a_{22}^{(4)} = 1;\ a_{23}^{(4)} = a_{24}^{(4)} = 0;\quad b_2^{(4)} = -\frac{\begin{vmatrix} -4 & -14 \\ 46 & 184 \end{vmatrix}}{46} = 2 \tag{2.59}$$

$$a_{31}^{(4)} = a_{32}^{(4)} = 0;\ a_{33}^{(4)} = 1;\ a_{34}^{(4)} = 0;\quad b_3^{(4)} = -\frac{\begin{vmatrix} 15 & 63 \\ 46 & 184 \end{vmatrix}}{46} = 3$$

$$a_{41}^{(4)} = a_{42}^{(4)} = a_{43}^{(4)} = 0;\ a_{44}^{(4)} = 1;\quad b_4^{(4)} = \frac{184}{46} = 4$$

După acest pas, matricea sistemului [A] şi matricea coloană {B} devin:

$$[A]^{(4)}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix};\qquad \{B\}^{(4)}=\begin{Bmatrix}1\\2\\3\\4\end{Bmatrix} \tag{2.60}$$

S-au obținut pentru elementele matricei coloană {B} chiar soluțiile sistemului (2.51):

$$x_1=1,\quad x_2=2,\quad x_3=3,\quad x_4=4. \tag{2.61}$$

2.4. Metoda eliminării Choleski

Este o metodă de eliminare cu un specific mai aparte, care permite rezolvarea ecuației matriceale (2.2): $[A]\{X\}=\{B\}$ prin descompunerea matricei pătratice [A] într-un produs de două matrice triunghiulare [L] şi [S]:

$$[A]=[L][S] \tag{2.62}$$

Forma generală a matricei pătrate [A] este:

$$[A]=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&...&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&...&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&...&a_{3n}\\.&.&.&.&.\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&...&a_{nn}\end{bmatrix} \tag{2.63}$$

Matricea triunghiulară inferioară [L] şi matricea triunghiulară superioară [S] au expresiile generale:

$$[L]=\begin{bmatrix}l_{11}&0&0&...&0\\l_{21}&l_{22}&0&...&0\\l_{31}&l_{32}&l_{33}&...&0\\.&.&.&.&.\\l_{n1}&l_{n2}&l_{n3}&...&l_{nn}\end{bmatrix};\qquad [S]=\begin{bmatrix}1&s_{12}&s_{13}&...&s_{1n}\\0&1&s_{23}&...&s_{2n}\\0&0&1&...&s_{3n}\\.&.&.&.&.\\0&0&0&...&1\end{bmatrix} \tag{2.64}$$

Elementele matricelor [L] şi [S] se determină din ecuațiila matriceală (2.62) care se scrie pe coloane astfel:

$$\begin{aligned}&a_{11}=l_{11},\ a_{21}=l_{21},\ a_{31}=l_{31},...,\ a_{n1}=l_{n1};\\&a_{12}=l_{11}s_{12},\ a_{22}=l_{21}s_{12}+l_{22},\ a_{32}=l_{31}s_{12}+l_{32},\ \ ...\ \ ,\ a_{n2}=l_{n1}s_{12}+l_{n2};\\&a_{13}=l_{11}s_{13},\ a_{23}=l_{21}s_{13}+l_{22}s_{23},\ a_{33}=l_{31}s_{13}+l_{32}s_{23}+l_{33},\ ...\ ,\ a_{n3}=l_{n1}s_{13}+l_{n2}s_{23}+l_{n3};\\&.\qquad.\qquad.\qquad.\qquad.\qquad.\qquad.\qquad.\qquad.\qquad.\\&a_{1n}=l_{11}s_{1n},\ a_{2n}=l_{21}s_{1n}+l_{22}s_{2n},\ \ ...\ \ ,\ a_{nn}=l_{n1}s_{1n}+l_{n2}s_{2n}+...+l_{n,n-1}s_{n-1,n}+l_{nn};\end{aligned} \tag{2.65}$$

Din ecuațiile (2.65) rezultă următoarele relații generale de recurență pentru calculul elementelor matricelor [L] şi [S] :

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{m=1}^{j-1} l_{im} s_{mj}, \qquad i \geq j$$

$$s_{ii} = 1; \qquad s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{m=1}^{j-1} l_{im} s_{mj}}{l_{ii}} \qquad i < j; \tag{2.66}$$

Elemente matricelor [L] şi [S] se calculează în următoarea succesiune:

$$l_{i1},\, s_{1j},\;\; l_{i2},\, s_{2j},\;\; l_{i3},\, s_{3j},\;\; \ldots\;\; l_{i,n-1},\; s_{n-1j},\;\; l_{nn}. \tag{2.67}$$

Ca urmare a scrierii matricei sub forma: $[A] = [L][S]$, ecuaţia matriceală (2.2) a sistemului devine:

$$[L][S]\{x\} = \{B\} \quad \text{sau} \quad [L]\{\Lambda\} = \{\mathrm{B}\} \tag{2.68}$$

unde $\{\Lambda\} = [S]\{x\}$ este o matrice coloană ale cărei elemente λ_i se determină

prin substituţie astfel:

$$\begin{cases} l_{11}\lambda_1 = b_1 \\ l_{21}\lambda_1 + l_{22}\lambda_2 = b_2 \\ l_{31}\lambda_1 + l_{32}\lambda_2 + l_{33}\lambda_3 = b_3 \\ \ldots. \\ l_{n1}\lambda_1 + l_{n2}\lambda_2 + \ldots + l_{nn}\lambda_n = b_n \end{cases} \tag{2.69}$$

Rezultă următoarele expresii pentru elementele λ_i:

$$\lambda_1 = \frac{1}{l_{11}} b_1; \qquad \lambda_2 = \frac{1}{l_{22}}\left(b_2 - l_{11}\lambda_1\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{2.70}$$

$$\lambda_n = \frac{1}{l_{nn}}\left(b_n - l_{n1}\lambda_1 - l_{n2}\lambda_2 - \ldots - l_{nn}\lambda_n\right).$$

Necunoscutele x_i se determină din ecuaţia matriceală $\{\Lambda\} = [S]\{x\}$:

$$\begin{cases} x_1 + s_{12}x_2 + s_{13}x_3 + \;\ldots.\; + s_{1n}x_n = \lambda_1 \\ \quad x_2 + s_{23}x_3 + \;\ldots. + s_{2n}x_n = \lambda_2 \\ \quad \ldots. \\ \qquad x_{n-1} + s_{n-1,n}x_n = \lambda_{n-1} \\ \qquad\qquad x_n = \lambda_n \end{cases} \tag{2.71}$$

Necunocutele x_i se determină din sistemul (2.71) prin substituţie începând cu ultima ecuaţie. Rezultă următoarele expresii:

$$\begin{aligned} &x_n = \lambda_n, \\ &x_{n-1} = \lambda_{n-1} - s_{n-1,n}x_n \\ &.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \\ &x_1 = \lambda_1 - s_{12}x_2 - s_{13}x_2 - \ldots - s_{1n}x_n. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Aplicația 2.4

Folosind metoda Choleski să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \;\; = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \;\; = 7 \end{cases} \tag{2.73}$$

Matricele [A] și {B} corespunzătoare sistemului (2.73) sunt:

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad \{B\} = \begin{Bmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{Bmatrix} \tag{2.74}$$

Pentru a determina elementele celor două matrice triunghiulare [L] și [S] se procedează astfel:

- se determină mai întâi elementele din prima coloană a matricei [L] și elementele din prima linie a matricei [S], conform relațiilor (2.65):

$$l_{11} = a_{11} = 2; \quad l_{21} = a_{21} = 1; \quad l_{31} = a_{31} = 1$$
$$s_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = -0.5; \qquad s_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = 2 \tag{2.75}$$

- se determină apoi elemente l_{i2}, s_{2j} , l_{i3}, s_{3j}, conform relațiilor (2.66):

$$l_{22} = a_{22} - \sum_{m=1}^{1} l_{2m}s_{m2} = a_{22} - l_{21}s_{12} = -0{,}5$$
$$l_{32} = a_{32} - \sum_{m=1}^{1} l_{3m}s_{m2} = a_{32} - l_{31}s_{12} = 4{,}5 \tag{2.76}$$

$$s_{23} = \frac{a_{23} - \sum_{m=1}^{1} l_{2m}s_{m3}}{l_{22}} = \frac{a_{23} - l_{21}s_{13}}{l_{22}} = 2 \tag{2.77}$$

$$l_{33} = a_{33} - \sum_{m=1}^{2} l_{3m}s_{m3} = a_{33} - l_{31}s_{13} - l_{32}s_{23} = -10 \tag{2.78}$$

Matricele triunghiulare [L] și [S] sunt:

$$[L] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -0{,}5 & 0 \\ 1 & 4{,}5 & -10 \end{bmatrix}; \quad [S] = \begin{bmatrix} 1 & -1{,}5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.79}$$

Conform relațiilor (2.70) se determină prin substituție elementele matricei intermediare $\{\Lambda\}$ din sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 = 9 \\ \lambda_1 - 0{,}5\lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 + 4{,}5\lambda_2 - 10\lambda_3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4{,}5 \\ 5 \\ 2 \end{Bmatrix} \tag{2.80}$$

Conform relațiilor (2.71) se determină prin substituție elementele matricei necunoscutelor $\{X\}$ din sistemul de ecuații::

$$\begin{cases} x_1 - 1{,}5x_2 + 2x_3 = 4{,}5 \\ x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}. \qquad (2.81)$$

2.5. Metoda iterativă Jacobi

În afară de metodele exacte Gauss şi Gauss Jordan se folosesc şi metode iterative aproximative de rezolvare a sistemelor de ecuații . Aceste metode prezintă unele avantaje şi dezavantaje. Dacă pentru rezolvarea unui sistem folosind metoda Gauss, numărul minim de operații necesar pentru determinarea soluțiilor este $N = n^3 + n^2/2$, numărul de operații necesar pentru determinarea soluțiilor folosind metodele iterative este mai mic decât în cazul metodei Gauss, dar apar erori de calcul ale soluției. Dacă aceste erori se reduc cu fiecare iterație spunem că metoda iterativă este convergentă. Metodele iterative permit şi rezolvarea sistemelor neliniare de ecuații. Fie sistemul de ecuații scris matriceal sub forma:

$$[A]\{X\} = \{B\} \qquad (2.82)$$

Metoda iterativă Jacobi se bazează pe exprimarea fiecărei necunoscute x_i în funcție de celelalte necunoscute parcurgând următorul algoritm:

1. se transformă matricea sistemului [A], prin schimbarea poziției ecuațiilor din ansamblul sistemului, astfel încât pe diagonala principală să se găsească elementele având cele mai mari valori absolute. Pentru noua matrice se calculează *dominanța pe linii,* adică raportul dintre valoarea absolută a elementului aflat pe diagonala principală şi suma valorilor absolute ale celorlalte elemente aflate pe aceeaşi linie, sau *dominanța pe coloane,* adică raportul dintre valoarea absolută a elementului aflat pe diagonala principală şi suma valorilor absolute ale celorlalte elemente aflate pe aceeaşi coloană.
2. se exprimă necunoscutele x_i în funcție de celelalte necunoscute x_j folosind ecuația i a sisemului (2.82):

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ii}x_i + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n = b_i \qquad (2.83)$$

   şi rezultă relațiile de calcul ale lui x_i:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j \right), \quad a_{ii} \neq 0, \quad i = 1,2,...,n \qquad (2.84)$$

3. valorile inițiale ale necunoscutelor notate cu $x_j^{(0)}$ ($j=1,2,3, ..., n, j\neq i$) se aleg arbitrar iar valorile corespunzătoare iterațiilor $k=1, 2, 3, ...$ se calculează ținând seama de (2.84) folosind relațiile de recurență:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}\right), \quad a_{ii} \neq 0, \quad \begin{cases} i = 1,2,\ldots,n \\ k = 1,2,3,\ldots \end{cases} \tag{2.85}$$

Metoda Jacobi este convergentă, dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

a) dominanța matricii [*A*] pe linii să fie supraunitară, adică:

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left|a_{ij}\right| < \left|a_{ii}\right|, \qquad i = 1,2,\ldots,n \tag{2.85}$$

b) dominanța matricii [*A*] pe coloane să fie supraunitară, adică:

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \left|a_{ij}\right| < \left|a_{jj}\right|, \qquad j = 1,2,\ldots,n \tag{2.86}$$

c) suma pătratelor rapoartelor dintre termenii a_{ij} $(i\neq j)$ și elementul corespunzător aflat pe diagonala principală a_{ii} să fie subunitar:

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right)^2 < 1, \qquad i = 1,2,\ldots,n \tag{2.87}$$

Aplicația 2.5

Să se rezolve (cu o precizie de 10^{-3}) prin metoda Jacobi sistemul liniar de ecuații:

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + x_3 = -3 \\ 16x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 24 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 12 \end{cases} \tag{2.88}$$

Rezolvare

Pentru a fi îndeplinite condiția de convergență (2.85) în sistemul de ecuații (2.88) se inversează prima ecuație cu cea de-a doua obținându-se:

$$\begin{cases} 16x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 24 \\ 3x_1 + 8x_2 + x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 12 \end{cases} \tag{2.89}$$

Sistemul (2.89) are o matrice dominantă pe linii, dominanțele corespunzătoare fiind:

$$d_1 = \frac{16}{5} = 3{,}2; \quad d_2 = \frac{8}{4} = 2; \quad d_3 = \frac{5}{2} = 2{,}5; \tag{2.90}$$

Relațiile de recurență (2.2.3) în acest caz se scriu:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{1}{16}\left(24 + 2x_2^{(k-1)} - 3x_3^{(k-1)}\right) & k = 1, 2, 3, ... \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{8}\left(-3 - 3x_1^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}\right) \\ x_3^{(k)} = \frac{1}{5}\left(12 - x_1^{(k-1)} + x_2^{(k-1)}\right) \end{cases} \tag{2.91}$$

Se consideră valorile inițiale: $\{X\}^{(0)} = \{\,0 \quad 0 \quad 0\,\}^T$ (2.92)

Înlocuind în relațiile (2.91) valorile inițiale ale necunoscutelor (2.92) şi apoi cele cele obținute din iterațiile *1, 2, 3, 4* şi *5* se obțin valorile din tabelul 2.1

Tabelul 2.1

Iterația	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0
1	1.5	-0.375	2.4
2	1.003125	-1.2375	2.025
3	0.965625	-1.0043	1.951875
4	1.008486	-0.98109	2.006016
5	1.001235	-1.00393	2.002084
Soluția exactă	*1*	*-1*	*2*

Se observă că soluția este convergentă.

2.6. Metoda iterativă Gauss - Seidel

Această metodă este tot o metodă iterativă care se deosebeşte de metoda *Jacobi* prin faptul că la iterația k se folosesc atât necunoscutele calculate la iterația *k-1 (k > i)* cât şi necunoscutele x_k calculate chiar la iterația *k (k < i)*. Pentru acestă metodă se obține o convergență mai rapidă a soluției.

Relațiile de calcul ale metodei *Gauss-Seidel* pentru iterația k sunt:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right), \quad a_{ii} \neq 0, \quad \begin{cases} i = 1, 2, ..., n \\ k = 1, 2, ... \end{cases} \tag{2.93}$$

Presupunând că matricea $[A]$ este dominantă pe linii, calculul iterativ va începe cu ecuația având dominanța cea mai mare. Sunt necesare aceleaşi condiții de convergență ca cele de la metoda *Jacobi.*

Aplicația 2.6

Folosind metoda *Gauss-Seidel* să se rezolve (cu o precizie de 10^{-3}) sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + x_3 = -3 \\ 16x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 24 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 12 \end{cases} \tag{2.94}$$

Rezolvare

Pentru a fi îndeplinite condiția de convergență (2.85) în sistemul de ecuații (2.88) se inversează prima ecuație cu cea de-a doua obținându-se:

$$\begin{cases} 16x_1 - 2x_2 + 3\,x_3 = 24 \\ 3x_1 + 8x_2 + x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 + 5\,x_3 = 12 \end{cases} \tag{2.95}$$

Dominanțele corespunzătoare pentru fiecare linie au fost calculate la aplicația 2.5:

$$d_1 = \frac{16}{5} = 3{,}2; \quad d_2 = \frac{8}{4} = 2; \quad d_3 = \frac{5}{2} = 2{,}5; \tag{2.96}$$

Pentru sistemul (2.95) calculul iterativ va începe cu prima ecuație care are dominanța cea mai mare, apoi continuă cu ecuația a treia şi în final a doua.

Relațiile de recurență ale metodei *Gauss-Seidel* se scriu:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{1}{16}\left(24 + 2x_2^{(k-1)} - 3x_3^{(k-1)}\right) \\ x_3^{(k)} = \frac{1}{5}\left(12 - x_1^{(k)} + x_2^{(k-1)}\right) \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{8}\left(-3 - 3x_1^{(k)} - x_3^{(k)}\right) \qquad k = 1,\ 2,\ 3,... \end{cases} \tag{2.97}$$

Valorile inițiale ale necunoscutelor se aleg astfel :

$$\{X\}^{(0)} = \{\,0 \quad 0 \quad 0\,\}^T \tag{2.98}$$

Înlocuind în relațiile (2.97) valorile inițiale ale necunoscutelor (2.98) şi apoi cele cele obținute din iterațiile *1, 2* şi *3* se obțin valorile din tabelul 2.2

Tabelul 2.2

Iterația	x_2	x_3	x_1
0	0	0	0
1	1.5	-1.2	2.1
2	0.95625	-0.97969	1.96875
3	1.008398	-1.00345	2.002383
Soluția exactă	*1*	*-1*	*2*

Soluția obținută prin metoda *Gauss-Seidel* este rapid convergentă .

2.7. Metode pentru inversarea matricelor

Rezolvarea unui sistem de ecuații se poate face matriceal dacă se inversează matricea sistemului [*A*]. Într-adevăr, înmulțind la stânga ecuația matriceală corespunzătoare sistemului $[A]\{X\} = \{B\}$ cu matricea inversă $[A]^{-1}$ se obține matricea necunoscutelor sistemului:

$$\{X\} = [A]^{-1}\{B\} \tag{2.99}$$

Pentru inversarea unei matrice pătratice [A] se folosesc mai multe metode care sunt prezentate în continuare.

2.7.1. Metodele Gauss, Choleski pentru inversarea matricelor

Aceaste metode permit inversarea unei matrice pătratice folosind principiile prezentate la paragrafele 2.1 şi 2.4 cu precizarea că aceste metode se aplică de n ori, adică pentru n sisteme de ecuații liniare.

Dându-se ecuația matriceală:

$$[A]\cdot[X]=[I] \tag{2.100}$$

înseamnă că matricea pătratică [X] reprezintă tocmai inversa matricei [A]:

$$[X]=[A]^{-1} \tag{2.101}$$

Ecuația matriceală (2.100) se scrie sub forma următoarelor n sisteme de ecuații corespunzătoare celor n coloane ale matricei unitate [I]:

Coloana 1:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21}+a_{13}x_{31}+\ldots+a_{1n}x_{n1}=1 \\ a_{21}x_{11}+a_{22}x_{21}+a_{23}x_{31}+\ldots+a_{2n}x_{n1}=0 \\ a_{31}x_{11}+a_{32}x_{21}+a_{33}x_{31}+\ldots+a_{3n}x_{n1}=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_{11}+a_{n2}x_{21}+a_{n3}x_{31}+\ldots+a_{nn}x_{n1}=0 \end{cases} \tag{2.102}$$

Coloana 2:

$$\begin{cases} a_{11}x_{12}+a_{12}x_{22}+a_{13}x_{32}+\ldots+a_{1n}x_{n2}=0 \\ a_{21}x_{12}+a_{22}x_{22}+a_{23}x_{32}+\ldots+a_{2n}x_{n2}=1 \\ a_{31}x_{12}+a_{32}x_{22}+a_{33}x_{32}+\ldots+a_{3n}x_{n2}=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_{12}+a_{n2}x_{22}+a_{n3}x_{32}+\ldots+a_{nn}x_{n2}=0 \end{cases} \tag{2.103}$$

. . . .

Coloana n:

$$\begin{cases} a_{11}x_{1n}+a_{12}x_{2n}+a_{13}x_{3n}+\ldots+a_{1n}x_{nn}=0 \\ a_{21}x_{1n}+a_{22}x_{2n}+a_{23}x_{3n}+\ldots+a_{2n}x_{nn}=0 \\ a_{31}x_{1n}+a_{32}x_{2n}+a_{33}x_{3n}+\ldots+a_{3n}x_{nn}=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_{1n}+a_{n2}x_{2n}+a_{n3}x_{3n}+\ldots+a_{nn}x_{nn}=1 \end{cases} \tag{2.104}$$

Metoda prezentată de inversare a matricei [A] este laborioasă, numărul de operații fiind de n ori mai mare decât cel corespunzător metodelor *Gauss,* respectiv *Choleski.*

2.7.2. Metoda Gauss - Jordan pentru inversarea matricelor

Metoda *Gauss-Jordan* pentru inversarea matricelor foloseşte aceleaşi principii prezentate la paragraful 2.3 cu observația că în acest caz operațiile de eliminare se aplică atât matricei [*A*] cât şi matricei [*I*] .

Ecuația matriceală $[A]\cdot[X]=[I]$ se scrie:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} [X] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{2.105}$$

Pentru inversarea matricei [*A*] prin metoda eliminării succesive Gauss-Jordan se foloseşte acelaşi algoritm prezentat la paragarful 2.3 cu deosebirea că operațiile elementare se fac atât asupra liniilor matricei [*A*] cât şi asupra liniilor matricei [*I*].

Presupunem $a_{11} \neq 0$ (dacă $a_{11}=0$ sau are o valoare apropiată de zero, se caută un element $a_{1k} \neq 0$ şi se schimbă poziția necunoscutei x_{1k} cu x_{11}) un *pivot* al sistemului (2.106) iar linia corespunzătoare *1* o linie de *pivotare*. Algoritmul are aceeaşi paşi ca şi la paragraful 2.3:

Pasul 1: Linia 1 este linia de pivotare şi a_{11} pivotul; se împart elementele de pe această linie ale matricelor [*A*] şi [*I*] la :

$$a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \qquad e_{1j}^{(1)} = \frac{e_{1j}}{a_{11}} \qquad j = 1,2,\dots,n; \tag{2.106}$$

Elementele liniilor *2, 3, 4, ... n* ale matricelor [*A*] şi [*I*] se adună cu elementele date de relația (2.106) multiplicate cu $-a_{i1}^{(1)}$ respectiv $-e_{i1}^{(1)}$ obținându-se:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{1j}^{(1)} a_{i1}, \quad e_{ij}^{(1)} = e_{ij} - e_{1j}^{(1)} e_{i1}, \quad i,j \geq 2 \tag{2.107}$$

După primul pas, se obține ecuația matriceală:

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ . & . & . & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} [X] = \begin{bmatrix} e_{11}^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ e_{21}^{(1)} & e_{22}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ e_{31}^{(1)} & 0 & e_{33}^{(1)} & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ e_{n1}^{(1)} & 0 & 0 & \dots & e_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \tag{2.108}$$

Pasul 2. Linia 2 este acum linia de pivotare şi $a_{22}^{(1)}$ pivotul; se împart elementele de pe această linie ale matricelor [*A*] şi [*I*] la $a_{22}^{(1)}$; apoi se elimină elementele aflate pe coloana 2 a matricei [*A*] din liniile *1, 3, 4, ... n,* obținându-se:

$$a_{2j}^{(2)} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \qquad e_{2j}^{(2)} = \frac{e_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \qquad j = 2,3,...n \tag{2.109}$$

$$a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)} - a_{12}^{(1)} \cdot a_{2j}^{(2)}, \qquad e_{1j}^{(2)} = e_{1j}^{(1)} - e_{12}^{(1)} \cdot e_{2j}^{(2)} \quad j = 2,3,...n \tag{2.110}$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} \cdot a_{2j}^{(2)}, \quad e_{ij}^{(2)} = e_{ij}^{(1)} - e_{i2}^{(1)} \cdot e_{2j}^{(2)}, \; j \geq 2, \quad i \geq 3 \tag{2.111}$$

După al doilea pas, se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{13}^{(2)} & ... & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & ... & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & ... & a_{3n}^{(2)} \\ . & . & . & ... & ... \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & ... & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} [X] = \begin{bmatrix} e_{11}^{(2)} & e_{12}^{(2)} & 0 & ... & 0 \\ e_{21}^{(2)} & e_{22}^{(2)} & 0 & ... & 0 \\ e_{31}^{(2)} & e_{32}^{(2)} & e_{33}^{(2)} & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . \\ e_{n1}^{(2)} & e_{n2}^{(2)} & 0 & ... & e_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \tag{2.112}$$

După ***pasul n*** se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix} [X] = \begin{bmatrix} e_{11}^{(n)} & e_{12}^{(n)} & e_{12}^{(n)} & ... & e_{12}^{(n)} \\ e_{21}^{(n)} & e_{22}^{(n)} & e_{23}^{(n)} & ... & e_{2n}^{(n)} \\ e_{31}^{(n)} & e_{32}^{(n)} & e_{33}^{(n)} & ... & e_{3n}^{(n)} \\ . & . & . & ... & . \\ e_{n1}^{(n)} & e_{n2}^{(n)} & e_{n3}^{(n)} & ... & e_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \tag{2.113}$$

Relația matriceală (2.113) este echivalentă cu:

$$[X] = [A]^{-1} = \begin{bmatrix} e_{11}^{(n)} & e_{12}^{(n)} & e_{12}^{(n)} & ... & e_{12}^{(n)} \\ e_{21}^{(n)} & e_{22}^{(n)} & e_{23}^{(n)} & ... & e_{2n}^{(n)} \\ e_{31}^{(n)} & e_{32}^{(n)} & e_{33}^{(n)} & ... & e_{3n}^{(n)} \\ . & . & . & ... & . \\ e_{n1}^{(n)} & e_{n2}^{(n)} & e_{n3}^{(n)} & ... & e_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \tag{2.114}$$

Aplicația 2.7

Folosind metoda *Gauss-Jordan* să se determine inversa matricei:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 6 & -6 \\ 4 & 2 & 8 & -2 \end{bmatrix} \tag{2.115}$$

Rezolvare

Relația $[A][X] = [I]$ se scrie în acest caz astfel:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 6 & -6 \\ 4 & 2 & 8 & -2 \end{bmatrix} [X] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.116}$$

***Pasul 1**:* Folosind linia *1* ca linie de pivotare se obține:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \end{bmatrix} [X] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.117}$$

Pasul 2: Folosind linia *2* ca linie de pivotare se obține:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 6 \end{bmatrix} [X] = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & -4/3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.118}$$

Pasul 3: Folosind linia *3* ca linie de pivotare se obține:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} [X] = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ -3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ -1/24 & -1/6 & 1/8 & 0 \\ 1/2 & 0 & -3/2 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.119}$$

Pasul 4: Folosind linia *4* ca linie de pivotare se obține:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [X] = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & -1/2 & 1/3 \\ -3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ -1/24 & -1/6 & 1/8 & 0 \\ 1/12 & 0 & -1/4 & 1/6 \end{bmatrix} \tag{2.120}$$

S-a obținut astfel matricea inversă:

$$[I] \cdot [X] = [A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & -1/2 & 1/3 \\ -3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ -1/24 & -1/6 & 1/8 & 0 \\ 1/12 & 0 & -1/4 & 1/6 \end{bmatrix} \tag{2.121}$$

2.7.3. Metoda partiționării pentru inversarea matricelor

În unele cazuri (de exemplu când anumite zone ale matricei conțin elemente nule) se poate diviza matricea în patru submatrice $[A_1]$, $[A_2]$, $[A_3]$ şi $[A_4]$ astfel încât submatricile de pe diagonala principală $([A_1]$ şi $[A_4])$ să fie pătratice:

$$[A]=\left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_3 \\ \hline A_2 & A_4 \end{array}\right] \tag{2.122}$$

Dacă se notează inversa matricii [A]:

$$[X]=[A]^{-1}=\left[\begin{array}{c|c} X_1 & X_3 \\ \hline X_2 & X_4 \end{array}\right] \tag{2.123}$$

este valabilă ecuația matriceală:

$$[A][A]^{-1}=\left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_3 \\ \hline A_2 & A_4 \end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c|c} X_1 & X_3 \\ \hline X_2 & X_4 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right] \tag{2.124}$$

care se mai scrie:

$$\begin{aligned} &[A_1][X_1]+[A_3][X_2]=[I] \\ &[A_1][X_3]+[A_3][X_4]=[0] \\ &[A_2][X_1]+[A_4][X_2]=[0] \\ &[A_2][X_3]+[A_4][X_4]=[I] \end{aligned} \tag{2.125}$$

Din a treia ecuație matriceală (2.125) rezultă:

$$[X_2]=-[A_4]^{-1}[A_2][X_1] \tag{2.126}$$

Înlocuind în prima ecuație matriceală (2.125) se obține:

$$[X_1]=\left([A_1]-[A_3][A_4]^{-1}[A_2]\right)^{-1} \tag{2.127}$$

Din a doua ecuație matriceală (2.125) rezultă:

$$[X_3]=-[A_1]^{-1}[A_3][X_4] \tag{2.128}$$

Înlocuind în a patra ecuație matriceală (2.125) se obține:

$$[X_4]=\left([A_4]-[A_2][A_1]^{-1}[A_3]\right)^{-1} \tag{2.129}$$

Pentru calculul matricei inversei $[A]^{-1}$ este necesară inversarea matricelor $[A_1]$ şi $[A_4]$.

Aplicația 2.8

Folosind metoda partiționării să se determine inversa matricei:

$$[A]=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & -1 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 2 & 4\end{bmatrix} \qquad (2.130)$$

Rezolvare

Se partiționează matricea [A] astfel:

$$[A]=\left[\begin{array}{c|c}A_1 & A_3\\ \hline A_2 & A_4\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|ccc}1 & 2 & 0 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 0 & 0 & 2\\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & -1 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 2 & 4\end{array}\right] \qquad (2.131)$$

Inversele matricelor [A_1] şi [A_4] se calculează imediat:

$$[A_1]^{-1}=\frac{1}{det[A_1]}[A_1]^{*}=\begin{bmatrix}3/5 & -2/5\\ 1/5 & 1/5\end{bmatrix} \qquad (2.132)$$

$$[A_4]^{-1}=\frac{1}{det[A_4]}[A_4]^{*}=\begin{bmatrix}5 & 4 & -1\\ -2 & -2 & 1/2\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad (2.133)$$

Folosind relația (2.127) se calculează matricea [X_1]:

$$[X_1]=\left([A_1]-[A_3][A_4]^{-1}[A_2]\right)^{-1}$$

$$[X_1]=\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5 & 4 & -1\\ -2 & -2 & 1/2\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right)^{-1} \qquad (2.134)$$

Rezultă:

$$[X_1]=\begin{bmatrix}-1/4 & 1/4\\ 1/12 & 1/4\end{bmatrix} \qquad (2.135)$$

Folosind relația (2.126) se calculează matricea [X_2]:

$$[X_2]=-[A_4]^{-1}[A_2][X_1]=-\begin{bmatrix}5 & 4 & -1\\ -2 & -2 & 1/2\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1/4 & 1/4\\ 1/12 & 1/4\end{bmatrix} \qquad (2.136)$$

Rezultă:

$$[X_2]=\begin{bmatrix}-13/12 & 3/4\\ 13/24 & -3/8\\ -1/4 & 1/4\end{bmatrix} \tag{2.137}$$

Folosind relația (2.129) se calculează matricea [X_4]:

$$[X_4]=\left([A_4]-[A_2]\cdot[A_1]^{-1}[A_3]\right)^{-1}$$

$$[X_4]=\left(\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3/5 & -2/5\\ 1/5 & 1/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\right)^{-1} \tag{2.138}$$

$$[X_4]=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & -4/5 & 1/5\\ 0 & 12/5 & 22/5\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-5/6 & -11/6 & 1/12\\ 11/12 & 11/12 & -1/24\\ -1/2 & -1/2 & 1/4\end{bmatrix}$$

Folosind relația (2.128) se calculează matricea [X_3]:

$$[X_3]=-[A_1]^{-1}[A_3][X_4]$$

$$[X_3]=\begin{bmatrix}3/5 & -2/5\\ 1/5 & 1/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5/6 & -11/6 & 1/12\\ 11/12 & 11/12 & -1/24\\ -1/2 & -1/2 & 1/4\end{bmatrix} \tag{2.139}$$

$$[X_3]=\begin{bmatrix}-3/2 & -3/2 & 1/4\\ -1/6 & -1/6 & -1/12\end{bmatrix}$$

Deci matricea $[A]^{-1}$ are expresia:

$$[X]=[A]^{-1}=\begin{bmatrix}-1/4 & 1/4 & -3/2 & -3/2 & 1/4\\ 1/12 & 1/4 & -1/6 & -1/6 & -1/12\\ -13/12 & 3/4 & -5/6 & -11/6 & 1/12\\ 13/24 & -3/8 & 11/12 & 11/12 & -1/24\\ 1/4 & 1/4 & -1/2 & -1/2 & 1/4\end{bmatrix} \tag{2.140}$$

3. METODE NUMERICE DE REZOLVARE A SISTEMELOR DE ECUAȚII NELINIARE

Cu excepția unor cazuri simple, rezolvarea sistemelor de ecuații neliniare se face numai prin metode iterative. Se consideră sistemul de ecuații neliniare sub forma canonică:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \\ .... \\ F_n(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

sau sub forma matriceală:

$$\{F\} = \{0\} \tag{3.2}$$

Soluțiile sistemului de ecuații neliniare (3.1) obținute prin metodele iterative sunt convergente dacă sunt îndeplinite condițiile:

- funcțiile $f_1, f_2, ..., f_n$ sunt continue şi derivabile pe domeniul de definiție;
- valorile inițiale $x_i^{(0)}$ şi valorile $x_i^{(n)}$ ale şirului care rezultă în urma iterațiilor aparțin domeniului de definiție;
- şirul de valori $x_i^{(n)}$ ale şirului iterații este convergent, adică dacă există limita:

$$\alpha_i = \lim_{k \to \infty} x_i^{(k)}. \tag{3.3}$$

Cele mai utilizate metode iterative de rezolvare a sistemelor de ecuații neliniare prezentate în continuare sunt: metoda Jacobi, metoda Newton Raphson şi metoda gradientului.

3.1. Metoda iterațiilor simple Jacobi

Sistemul de ecuații neliniare (3.1) se mai scrie sub forma canonică astfel:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \\ x_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \\ .... \\ x_n = f_n(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \end{cases} \tag{3.4}$$

Sistemul (3.4) se scrie sub forma matriceală astfel:

$$\{X\} = \{f\} \qquad (3.5)$$

Relația de recurență corespunzătoare metodei *Jacobi* pentru iterația k se obține direct prin exprimarea necunoscurtei x_i (din ecuația i a sistemului) în funcție de necunoscutele calculate la iterația anterioară *k-1*:

$$x_i^{(k)} = f_i(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, x_3^{(k-1)}, ..., x_n^{(k-1)}), \qquad k = 1, 2, 3, ... \qquad (3.6)$$

Eroarea de calcul a soluției corespunzătoare iterației k se calculează astfel:

$$E \le \frac{M}{1-M}\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}),$$
$$unde: \ M = max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n\} \qquad (3.7)$$

O creștere a preciziei soluției $x_i^{(k)}$ corespunzătoare iterației k se realizează dacă în relația de recurență (3.6) se iau în calcul valorile deja obținute pentru necunoscutele ($x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_{i-1}^{(k)}$) la această iterație.

Se obține deci noua relație de recurență:

$$x_i^{(k)} = f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k-1)}, ..., x_n^{(k-1)}) \qquad (3.8)$$

Soluția aproximativă $\{x^{(k)}\}$ corespunzătoare iterației k este convergentă dacă sunt îndeplinite condițiile:

1. $$\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| \le \varepsilon_1, \quad i = 1,2,3,...,n \qquad (3.9)$$

2. $$\left|F_i\left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, ..., x_n^{(k+1)}\right)\right| \le \varepsilon_2, \quad i = 1,2,3,...,n \qquad (3.10)$$

unde ε_1 şi ε_2 sunt două valori oricât de mici, depinzând de ordinul k al iterației.

3.2. Metoda iterativă Newton - Raphson

Fie sistemul de ecuații neliniare (3.1)

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \\ .... \\ F_n(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \end{cases} \qquad (3.11)$$

în care funcțiile $F_i(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ sunt derivabile în raport cu toate variabilele x_i, cu derivatele de ordinul întâi continue pe domeniul de definiție.

Matricea funcțională sau *Jacobianul sistemului* este o matrice nesingulară pentru valori ale variabilelor x_i egale cu valorile soluției sistemului precum şi pentru orice valori situate într-o vecinătate a soluției:

$$det[J] \ne 0 \qquad (3.12)$$

Soluția exactă se poate scrie ca suma dintre soluția aproximativă $\{X^{(k)}\}$ şi eroarea $\{\varepsilon^{(k)}\}$, corespunzătoare iterației *k,* adică:

$$\{X\} = \{X^{(k)}\} + \{\varepsilon^{(k)}\} \tag{3.13}$$

în care s-a notat:

$$\begin{aligned} \{X^{(k)}\} &= \{x_1^{(k)}\ x_2^{(k)}\ \dots\ x_n^{(k)}\}^T \\ \{\varepsilon^{(k)}\} &= \{\varepsilon_1^{(k)}\ \varepsilon_2^{(k)}\ \dots\ \varepsilon_n^{(k)}\}^T \end{aligned} \tag{3.14}$$

Dacă se exprimă funcțiile $F_i(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$ într-o vecinătate a soluției exacte (3.13) folosind dezvoltarea în serie Taylor şi se rețin doar termenii corespunzători primei derivate se obține:

$$\begin{aligned} &F_i(x_1^{(k)} + \varepsilon_1^{(k)},\ x_2^{(k)} + \varepsilon_2^{(k)},\ \dots,\ x_n^{(k)} + \varepsilon_n^{(k)}) \cong \\ &\cong F_i(x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\dots,\ x_n^{(k)}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i(x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\ x_3^{(k)},\dots,\ x_n^{(k)})}{\partial x_j}\ \varepsilon_j^{(k)} \end{aligned} \tag{3.15}$$

Ținând seama de relația (3.11) se obține un sistem de *n* ecuații liniare având ca necunoscute $\varepsilon_j^{(k)}$ de forma:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i(x_1^{(k)},x_2^{(k)},x_3^{(k)},\dots,x_n^{(k)})}{\partial x_j}\ \varepsilon_j^{(k)} = -F_i(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\dots,x_n^{(k)}) \tag{3.16}$$

i=1,2,3,...,n

Sistemul (3.16) se poate scrie sub formă matriceală astfel:

$$[J^{(k)}] \cdot \{\varepsilon^{(k)}\} = -\{F^{(k)}\} \tag{3.17}$$

unde $[J^{(k)}]$ este *matricea caracteristică* sau *Jacobianul sistemului*:

$$[J^{(k)}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1^{(k)}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1^{(k)}}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial F_1^{(k)}}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial F_2^{(k)}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2^{(k)}}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial F_2^{(k)}}{\partial x_n} \\ . & . & . & . \\ \dfrac{\partial F_n^{(k)}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_n^{(k)}}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial F_n^{(k)}}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

unde s-a notat: $F_i^{(k)} = F_i(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\dots,x_n^{(k)})$ (3.19)

Întrucât prin ipoteză matricea caracteristică (3.18) este nesingulară, poate fi inversată. Înmulțind ecuația matriceală (3.17) la stânga cu matricea inversă $[J^{(k)}]^{-1}$ se obține o matrice a erorilor corespunzătoare iterației *k*:

$$\{\varepsilon^{(k)}\} = -[J^{(k)}]^{-1}\{F^{(k)}\} \tag{3.20}$$

Ținând seama de relația (3.13) se obține soluția aproximativă corespunzătoare iterației $k+1$ respectiv suma

$$\left\{X^{(k+1)}\right\}=\left\{X^{(k)}\right\}+\left\{\varepsilon^{(k)}\right\}, \tag{3.21}$$

sau:

$$\left\{X^{(k+1)}\right\}=\left\{X^{(k)}\right\}-\left[J^{(k)}\right]^{-1}\left\{F^{(k)}\right\} \tag{3.21'}$$

Expresia (3.21) reprezintă *relația iterativă a metodei Newton Raphson*.

Pentru soluția aproximativă inițială $\left\{X^{(0)}\right\}$ se poate lua orice valoare din vecinătatea soluției exacte, metoda fiind rapid convergentă.

Se observă similitudinea relației (3.21) obținută pentru sisteme de ecuații liniare cu relația *Newton Raphson* (1.11) corespunzătoare ecuațiilor cu o singură variabilă.

Aplicația 3.1

Se consideră mecanismul patrulater articulat din figura 3.1. Folosind metoda *Newton-Raphson* să se determine soluțiile (β, ψ) cu o eroare de $\varepsilon=10^{-4}$ pentru următoarele trei poziții ale manivelei: $\varphi_1 = 45^0$, $\varphi_2 = 50^0$, $\varphi_3 = 55^0$. Se dau valorile numerice pentru dimensiunile elementelor mecanismului, notațiile fiind conform figurii 3.1: $d = 220\ mm;\ r = 50 mm;\quad L = 200 mm;\ R = 100\ mm$

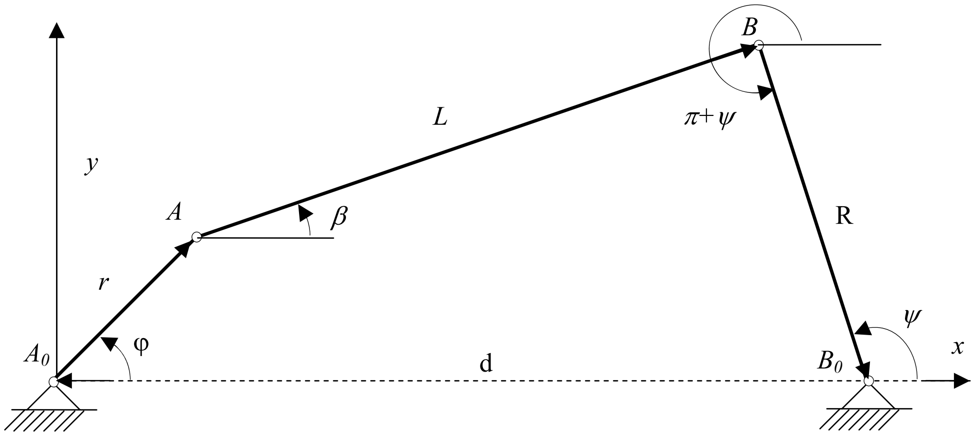


Fig. 3.1

Rezolvare

Sistemul de ecuații neliniare care furnizează cele două necunoscute ale problemei (β, ψ) se obține scriind proiecțiile conturului închis orientat A_0ABB_0 după cele două axe Ox respectiv Oy, conform figurii 3.4.1 :

$$\begin{cases} \sum prOx = 0 :\ r\cos\varphi + L\cos\beta + R\cos(\psi+\pi) + d\cos\pi = 0 \\ \sum prOy = 0 :\ r\sin\varphi + L\sin\beta + R\sin(\psi+\pi) + d\sin\pi = 0 \end{cases} \tag{3.22}$$

Deoarece mărimile *r, L, R, d* sunt constante iar unghiul φ este un parametru, din relația (3.22) rezultă sistemul neliniar cu necunocutele β și ψ:

$$\begin{cases} r\cos\varphi + L\cos\beta - R\cos\psi - d = 0 \\ r\sin\varphi + L\sin\beta - R\sin\psi = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Pentru a rezolva sistemul (3.23) folosind metoda *Newton Raphson,* pentru poziția manivelei dată de unghiul $\varphi_1=45^0$, se ia ca soluție inițială din vecinătatea soluției exacte soluția:

$$\left\{X^{(0)}\right\} = \begin{Bmatrix} \beta_0 \\ \psi_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20^0 \\ 90^0 \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

Soluția corespunzătoare iterației *k+1* conform relației (3.21) se scrie:

$$\left\{X^{(k+1)}\right\} = \left\{X^{(k)}\right\} - \left[J^{(k)}\right]^{-1}\left\{F^{(k)}\right\}, \quad k = 0,1,2,\ldots \quad (3.25)$$

unde:

$$\left\{F^{(k)}\right\} = \begin{Bmatrix} r\cos\varphi_k + L\cos\beta_k - R\cos\psi_k - d \\ r\sin\varphi_k + L\sin\beta_k - R\sin\psi_k \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

Jacobianul sistemului (3.23) se determină astfel:

$$[J] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial \beta} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \psi} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial \beta} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L\sin\beta & R\sin\psi \\ L\cos\beta & -R\cos\psi \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

iar inversa lui are expresia:

$$[J]^{-1} = \frac{1}{LR\sin(\beta-\psi)}\begin{bmatrix} R\cos\psi & R\sin\psi \\ L\cos\beta & L\sin\beta \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Se verifică dacă este adevărată relația: $[J]^{-1}[J] = [I]$

Expresia (3.28) corespunzătoare iterației *k+1* este:

$$\left[J^{(k)}\right]^{-1} = \frac{1}{LR\sin(\beta_k-\psi_k)}\begin{bmatrix} R\cos\psi_k & R\sin\psi_k \\ L\cos\beta_k & L\sin\beta_k \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Înlocuind expresiile (3.26) şi (3.29) în (3.25) se obține relația de recurență:

$$\begin{Bmatrix} \beta_{k+1} \\ \psi_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_k \\ \psi_k \end{Bmatrix} + \frac{1}{LR\sin(\beta_k-\psi_k)}\begin{bmatrix} R\cos\psi_k & R\sin\psi_k \\ L\cos\beta_k & L\sin\beta_k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} r\cos\varphi_k + L\cos\beta_k - R\cos\psi_k - d \\ r\sin\varphi_k + L\sin\beta_k - R\sin\psi_k \end{Bmatrix}$$

(3.30)

Efectuând calculele se obțin după primele două iterații valorile soluției cu o eroare mai mică de $0{,}0001^0$: $\beta_1=18{,}825130$ şi $\psi_1= 87{,}330842$, conform tabelului 3.1. Metoda este rapid convergentă.

Pentru celelalte două poziţii ale manivelei A_0A: $\varphi_2=50^0$ şi $\varphi_3=55^0$ se aplică acelaşi algoritm, luându-se ca soluţii iniţiale valorile obţinute la poziţia precedentă, (β_1, ψ_1) respectiv (β_2, ψ_2) conform tabelului 3.1.

Tabelul 3.1

k	φ_k	β_k	ψ_k	β_{k+1}	ψ_{k+1}	ε_β	ε_ψ
1	45	20	90	18.85390	87.328796		
	45	18.825130	87.328796	18.82513	87.330827	-0.02878	0.002031
	45	*18.825133*	*87.330827*	*18.82513*	*87.330842*	*3.183E-06*	*1.55E-05*
2	50	18.825133	87.330827	17.964908	88.619693	-0.86023	1.288851
	50	17.964908	88.619693	17.959558	88.628075	-0.00535	0.008381
	50	*17.959558*	*88.628075*	*17.959558*	*88.628075*	*-3.14E-07*	*3.114E-07*
3	55	17.959558	88.628075	17.178781	90.129761	-0.78078	1.501687
	55	17.178781	90.129761	17.170171	90.134512	-0.00861	0.004751
	55	*17.170171*	*90.134512*	*17.170171*	*90.134513*	*9.53E-08*	*1.29E-06*

Aplicaţia 3.2

Se consideră mecanismul unei prese cu genunchi având schema cinematică din figura 3.2. Folosind metoda *Newton Raphson* se cere să se facă analiza poziţională pentru o rotaţie completă a manivelei A_0A începând cu $\varphi_1=60^0$ până la $\varphi_{37} = 420^0$ din 10^0 în 10^0 şi cu o precizie de $\varepsilon=0,00001^0$. Valorile numerice ale parametrilor d_1, d_2, r, R, L_1, L_2 sunt (fig. 3.2):

$$d_1 = 360\ mm;\ d_2 = 200\ mm; r = 120\,mm;$$

$$R = 280\ mm; L_1 = 550mm;\ L_2 = 520mm;$$

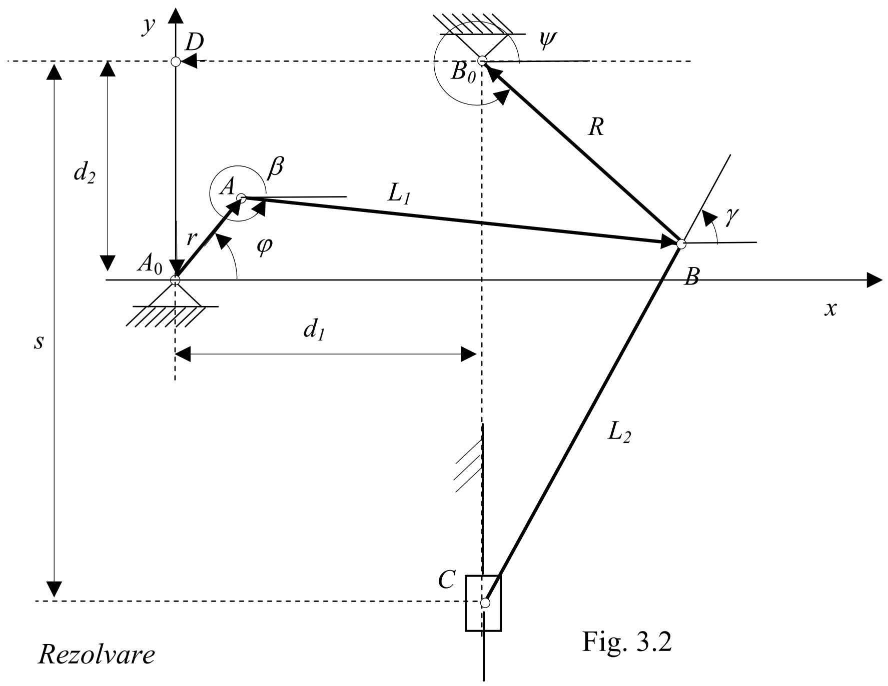


Fig. 3.2

Rezolvare

Așa cum se observă din figura 3.2, necunoscutele problemei (β, ψ, γ, s) nu sunt independente. Ecuațiile neliniare pentru determinarea acestor necunoscute se obțin prin scrierea proiecțiilor contururilor închise $A_0ABB_0DA_0$ respectiv B_0BCB_0 pe cele două axe *Ox* și *Oy* ținând seama de unghiurile vectorilor ce formează conturul în raport cu axele de coordonate *Ox* și *Oy*, conform tabelului 3.2.

Tabelul 3.2

Vectorul	A_0A	AB	BB_0	B_0D	DA_0	CB	B_0C
Unghiul cu Ox	φ	β	ψ - 180^0	180^0	270^0	γ	270^0
Unghiul cu Oy	φ - 90^0	β - 90^0	ψ - 270^0	90^0	180^0	γ - 90^0	180^0

Suma proiecțiilor vectorilor pentru două contururi după *Ox* și *Oy* se scrie:

$$\begin{cases} r\cos\varphi + L_1\cos\beta + R\cos(\psi - 180^0) + d_1\cos 180^0 + d_2\cos 270^0 = 0 \\ r\sin\varphi + L_1\sin\beta + R\sin(\psi - 180^0) + d_1\sin 180^0 + d_2\sin 270^0 = 0 \\ L_2\cos\gamma + R\cos(\psi - 180^0) + s\cdot\cos 270^0 = 0 \\ L_2\sin\gamma + R\sin(\psi - 180^0) + s\cdot\sin 270^0 = 0 \end{cases} \tag{3.31}$$

Deoarece parametrii r, R, L_1, L_2, d_1, d_2 au valori constante iar φ este un parametru variabil, rezultă următorul sistem neliniar având ca necunoscute unghiurile β, ψ, γ și distanța s:

$$\begin{cases} F_1(\beta,\psi,\gamma,s) = r\cos\quad + L_1\cos\beta - R\cos\psi - d_1 = 0 \\ F_2(\beta,\psi,\gamma,s) = r\sin\quad + L_1\sin\beta - R\sin\psi - d_2 = 0 \\ F_3(\beta,\psi,\gamma,s) = -R\cos\psi + L_2\cos\gamma = 0 \\ F_4(\beta,\psi,\gamma,s) = -R\sin\psi + L_2\sin\gamma - s = 0 \end{cases} \tag{3.32}$$

Soluția sitemului (3.32) corespunzătoare iterației $k+1$ conform relației (3.21) se scrie :

$$\left\{X^{(k+1)}\right\} = \left\{X^{(k)}\right\} - \left[J^{(k)}\right]^{-1}\left\{F^{(k)}\right\}, \quad k = 0,1,2,... \tag{3.33}$$

unde: - vectorul coloană $\left\{F^{(k)}\right\}$ are expresia:

$$\left\{F^{(k)}\right\} = \begin{Bmatrix} r\cos\varphi_k + L_1\cos\beta_k - R\cos\psi_k - d_1 \\ r\sin\varphi_k + L_1\sin\beta_k - R\sin\psi_k - d_2 \\ -R\cos\psi_k + L_2\cos\gamma_k \\ -R\sin\psi_k + L_2\sin\gamma_k - s_k \end{Bmatrix} \tag{3.34}$$

- matricea Jacobian a sistemului (3.32) are forma:

$$[J] = \begin{bmatrix} -L_1\sin\beta & R\sin\psi & 0 & 0 \\ L_1\cos\beta & -R\cos\psi & 0 & 0 \\ 0 & R\sin\psi & -L_2\sin\gamma & 0 \\ 0 & -R\cos\psi & L_2\cos\gamma & -1 \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

Inversa matricei jacobian are expresia:

$$[J]^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{cos\psi}{L_1 sin(\beta-\psi)} & -\frac{sin\psi}{L_1 sin(\beta-\psi)} & 0 & 0\\ -\frac{cos\beta}{R sin(\beta-\psi)} & -\frac{sin\beta}{R sin(\beta-\psi)} & 0 & 0\\ -\frac{cos\beta\cdot sin\psi}{L_2 sin\gamma\cdot sin(\beta-\psi)} & -\frac{sin\beta\cdot sin\psi}{L_2 sin\gamma\cdot sin(\beta-\psi)} & -\frac{1}{L_2 sin\gamma} & 0\\ -\frac{cos\beta\cdot sin(\psi-\gamma)}{L_2 sin\gamma\cdot sin(\beta-\psi)} & -\frac{sin\beta\cdot sin(\psi-\gamma)}{L_2 sin\gamma\cdot sin(\beta-\psi)} & -\frac{cos\gamma}{sin\gamma} & -1 \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

Soluția corespunzătoare iterației (*k+1)* (3.33) se scrie:

$$\begin{Bmatrix}\beta_{k+1}\\ \psi_{k+1}\\ \gamma_{k+1}\\ s_{k+1}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\beta_k\\ \psi_k\\ \gamma_k\\ s_k\end{Bmatrix}-\left[J^{(k)}\right]^{-1}\begin{Bmatrix} r\,cos\,\varphi_k+L_1 cos\,\beta_k-R\,cos\psi_k-d_1\\ r\,sin\,\varphi_k+L_1 sin\,\beta_k-R\,sin\psi_k-d_2\\ -R\,cos\psi_k+L_2 cos\,\gamma_k\\ -R\,sin\psi_k+L_2 sin\,\gamma_k-s_k\end{Bmatrix} \tag{3.37}$$

Relația matriceală (3.37) se scrie analitic:

$$\begin{aligned}
\beta_{k+1}&=\beta_k+\frac{cos\psi_k}{L_1 sin(\beta_k-\psi_k)}\left(r\,cos\,\varphi_k+L_1 cos\,\beta_k-R\,cos\psi_k-d_1\right)+\\
&\quad+\frac{sin\psi_k}{L_1 sin(\beta_k-\psi_k)}\left(r\,sin\,\varphi_k+L_1 sin\,\beta_k-R\,sin\psi_k-d_2\right).\\
\psi_{k+1}&=\psi_k+\frac{cos\,\beta_k}{R\,sin(\beta_k-\psi_k)}\left(r\,cos\,\varphi_k+L_1 cos\,\beta_k-R\,cos\psi_k-d_1\right)+\\
&\quad+\frac{sin\,\beta_k}{R\,sin(\beta_k-\psi_k)}\left(r\,sin\,\varphi_k+L_1 sin\,\beta_k-R\,sin\psi_k-d_2\right).\\
\gamma_{k+1}&=\gamma_k+\frac{cos\,\beta_k\,sin\psi_k}{L_2 sin\,\gamma_k\,sin(\beta_k-\psi_k)}\left(r\,cos\,\varphi_k+L_1 cos\,\beta_k-R\,cos\psi_k-d_1\right)+\\
&\quad+\frac{sin\,\beta_k\,sin\psi_k}{L_2 sin\,\gamma_k\,sin(\beta_k-\psi_k)}\left(r\,sin\,\varphi_k+L_1 sin\,\beta_k-R\,sin\psi_k-d_2\right)+\\
&\quad+\frac{1}{L_2 sin\,\gamma_k}\left(-R\,cos\psi_k+L_2 cos\,\gamma_k\right).\\
s_{k+1}&=s_k+\frac{cos\,\beta_k\,sin(\psi_k-\gamma_k)}{sin\,\gamma_k\,sin(\beta_k-\psi_k)}\left(r\,cos\,\varphi_k+L_1 cos\,\beta_k-R\,cos\psi_k-d_1\right)+\\
&\quad+\frac{sin\,\beta_k\,sin(\psi_k-\gamma_k)}{sin\,\gamma\,sin(\beta-\psi)}\left(r\,sin\,\varphi_k+L_1 sin\,\beta_k-R\,sin\psi_k-d_2\right)+\\
&\quad+\frac{cos\,\gamma_k}{sin\,\gamma_k}\left(-R\,cos\psi_k+L_2 cos\,\gamma_k\right)+\left(-R\,sin\psi_k+L_2 sin\,\gamma_k-s_k\right).
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Efectuând calculele şi considerând ca soluție inițială pentru $\varphi_1=60^0$ valoarile aproximative: $\{\beta_0 \ \psi_0 \ \gamma_0 \ s_0\}=\{350^0 \ \ 300^0 \ \ 50^0 \ \ 600\}$, după primele patru iterații se obține soluția: $\{\beta_1=356.6823; \ \psi_1=332.8186; \ \beta_1=61.38011; \ s_1=584.3711\}$ cu o eroare mai mică de $0{,}0001^0$ respectiv *0,005 mm,* conform tabelului 3.3.

Tabelul 3.3

$\beta_k(^0)$	$\psi_k(^0)$	$\gamma_k(^0)$	$s_k(mm)$	$\varepsilon\beta_k(^0)$	$\varepsilon\psi_k(^0)$	$\varepsilon\gamma_k(^0)$	$\varepsilon s_k(mm)$
350.9163	324.3778	63.110021	657.68742	0.0159931	0.425473	0.228642	57.68742
356.5459	332.8199	61.07769	584.9776	0.0982546	0.1473424	-0.0353	-72.7098
356.6827	332.8194	61.38033	584.37495	0.0023877	-8.04E-06	0.005282	-0.60265
356.6823	***332.8186***	***61.38011***	***584.3711***	-6.45E-06	-1.38E-05	-3.18E-06	-0.00385

Pentru celelalte 36 de poziții ale manivelei A_0A date de unghiurile $\varphi_2=70^0$, $\varphi_3=80^0,\ldots,\ \varphi_{37}=420^0$ se aplică acelaşi algoritm, luându-se ca soluții aproximative inițiale valorile obținute pentru poziția precedentă. Rezultatele obținute sunt date în tabelul 3.4.

Tabelul 3.4

φ k *(rad)*	***beta k*** *(rad)*	***psi k*** *(rad)*	***gama k*** *(rad)*	***s k*** *(mm)*	***beta k+1*** *(^{0})*	***psi k+1*** *(^{0})*	***gama k+1*** *(^{0})*
60π/180	350π/180	300π/180	60π/180	584	356.6563	332.7753	61.37811
1.047198	6.224826	5.808025	1.07125002	584.6245	356.6823	332.8186	61.38011
1.047198	*6.225281*	*5.808781*	*1.07128495*	***584.3711***	***356.6823***	***332.8186***	***61.38011***
1.22173	6.225281	5.808781	1.07128506	584.3711	351.3001	322.9872	64.13499
1.22173	6.131343	5.63719	1.11936676	639.0868	351.7464	323.5929	64.31732
1.22173	*6.139133*	*5.647762*	*1.122549*	*634.8251*	*351.7466*	*323.5916*	*64.31917*
1.396263	6.139136	5.647739	1.12258119	634.8257	347.4472	314.5833	67.51374
1.396263	6.064098	5.490515	1.17833706	682.8199	347.8662	315.1637	67.55135
1.396263	6.071411	5.500644	1.1789934	678.0293	347.8666	315.1627	67.55296
1.396263	*6.071417*	*5.500626*	*1.17902162*	*678.0281*	*347.8666*	*315.1627*	*67.55296*
1.570796	6.071417	5.500626	1.17902162	678.0281	344.7697	307.3019	70.7821
1.570796	6.017367	5.36343	1.23538061	716.4587	345.1128	307.7814	70.73731
1.570796	6.023354	5.371798	1.234599	712.1955	345.1131	307.7806	70.73832
1.570796	*6.02336*	*5.371786*	*1.23461661*	*712.1927*	*345.1131*	*307.7806*	*70.73832*
1.745329	6.02336	5.371786	1.23461661	712.1927	343.1677	301.1435	73.73045
1.745329	5.989406	5.255945	1.28683911	741.022	343.4232	301.5014	73.6585
1.745329	5.993865	5.262192	1.28558328	737.7336	343.4234	301.501	73.65902
1.745329	*5.993868*	*5.262185*	*1.28559235*	*737.731*	*343.4234*	*301.501*	*73.65902*
1.919862	5.993868	5.262185	1.28559235	737.731	342.497	296.0431	76.27027

1.919862	5.9777	5.166927	1.33116724	758.3354	342.6721	296.2858	76.20438
1.919862	5.980757	5.171163	1.33001732	756.0488	342.6723	296.2856	76.20461
1.919862	*5.980759*	*5.171159*	*1.33002141*	*756.0472*	*342.6723*	*296.2856*	*76.20461*
2.094395	5.980759	5.171159	1.33002141	756.0472	342.6047	291.9149	78.37739
2.094395	5.97958	5.094876	1.36794348	770.2083	342.7142	292.0596	78.33257
2.094395	5.981491	5.097401	1.36716124	768.759	342.7143	292.0594	78.33266
2.094395	*5.981492*	*5.097399*	*1.36716287*	*768.7584*	*342.7143*	*292.0594*	*78.33266*
2.268928	5.981492	5.097399	1.36716287	768.7584	343.3453	288.6737	80.05795
2.268928	5.992505	5.038306	1.39727485	778.1391	343.4051	288.7401	80.03802
2.268928	5.99355	5.039465	1.39692691	777.316	343.4051	288.74	80.03805
2.268928	*5.99355*	*5.039464*	*1.39692745*	*777.316*	*343.4051*	*288.74*	*80.03805*
2.443461	5.99355	5.039464	1.39692745	777.316	344.587	286.2441	81.33024
2.443461	6.014177	4.995902	1.4194805	783.2635	344.6118	286.2511	81.33327
2.443461	6.01461	4.996024	1.4195333	782.8749	344.6118	286.2511	81.33327
2.443461	*6.01461*	*4.996024*	*1.41953341*	*782.8749*	*344.6118*	*286.2511*	*81.33327*
2.617994	6.01461	4.996024	1.41953341	782.8749	346.2138	284.5636	82.21568
2.617994	6.04257	4.966572	1.4349343	786.3894	346.2156	284.5275	82.23731
2.617994	6.042603	4.965942	1.43531189	786.2825	346.2156	284.5275	82.23731
2.617994	*6.042603*	*4.965942*	*1.43531185*	*786.2824*	*346.2156*	*284.5275*	*82.23731*
2.792527	6.042603	4.965942	1.43531185	786.2824	348.1248	283.5819	82.73478
2.792527	6.075923	4.949437	1.44399434	788.0514	348.1133	283.5165	82.77003
2.792527	6.075723	4.948296	1.44460951	788.1105	348.1133	283.5165	82.77002
2.792527	*6.075724*	*4.948297*	*1.44460943*	*788.1102*	*348.1133*	*283.5165*	*82.77002*
2.96706	6.075724	4.948297	1.44460943	788.1102	350.233	283.2592	82.90584
2.96706	6.112718	4.943805	1.44697983	788.5593	350.2157	283.1758	82.94994
2.96706	6.112416	4.942349	1.44774958	788.698	350.2157	283.1758	82.94994
2.96706	*6.112417*	*4.94235*	*1.44774949*	*788.6975*	*350.2157*	*283.1758*	*82.94994*
3.141593	6.112417	4.94235	1.44774949	788.6975	352.4641	283.5635	82.74512
3.141593	6.15166	4.949117	1.44417469	788.0375	352.4467	283.4711	82.79397
3.141593	6.151355	4.947505	1.44502727	788.1898	352.4467	283.4712	82.79396
3.141593	*6.151356*	*4.947505*	*1.44502717*	*788.1892*	*352.4467*	*283.4712*	*82.79396*
3.316126	6.151356	4.947505	1.44502717	788.1892	354.7557	284.4678	82.26791
3.316126	6.191655	4.9649	1.43584585	786.4557	354.7425	284.3738	82.3182
3.316126	6.191424	4.963259	1.43672355	786.569	354.7425	284.3738	82.31819
3.316126	*6.191425*	*4.963259*	*1.43672345*	*786.5684*	*354.7425*	*284.3738*	*82.31819*
3.490658	6.191425	4.963259	1.43672345	786.5684	357.0559	285.9473	81.49003
3.490658	6.231801	4.990721	1.42226938	783.6549	357.0503	285.8574	81.5393
3.490658	6.231703	4.989152	1.42312917	783.686	357.0504	285.8574	81.53929
3.490658	*6.231704*	*4.989152*	*1.42312908*	*783.6854*	*357.0504*	*285.8574*	*81.53929*
3.665191	6.231704	4.989152	1.42312908	783.6854	359.3231	287.9767	80.42948

3.665191	6.27137	5.026141	1.40375923	779.3735	359.3277	287.8955	80.47606
3.665191	6.271452	5.024725	1.40457218	779.2862	359.3277	287.8955	80.47606
3.665191	*6.271452*	*5.024725*	*1.40457212*	*779.2857*	*359.3277*	*287.8955*	*80.47606*
3.839724	6.271452	5.024725	1.40457212	779.2857	6.309797	5.070681	1.3806946
3.839724	6.309797	5.070681	1.38069462	773.2773	6.310094	5.069485	1.3814446
3.839724	6.310094	5.069485	1.38144464	773.0425	6.310094	5.069486	1.3814446
3.839724	6.310094	5.069486	1.38144464	773.0421	6.310094	5.069486	1.3814446
4.014257	6.271452	5.024725	1.40457212	779.2857	363.571	293.7587	77.42974
4.014257	6.345511	5.127056	1.3514038	765.9067	363.6679	293.5199	77.59133
4.014257	6.347202	5.122888	1.35422417	764.595	363.6681	293.5199	77.59139
4.014257	*6.347206*	*5.122888*	*1.35422512*	*764.5909*	*363.6681*	*293.5199*	*77.59139*
4.18879	6.347206	5.122888	1.35422512	764.5909	365.6439	297.073	75.79517
4.18879	6.381689	5.184901	1.32287521	754.1586	365.6899	297.0397	75.83063
4.18879	6.382493	5.184321	1.32349416	753.5734	365.6899	297.0397	75.83065
4.18879	*6.382493*	*5.184321*	*1.32349446*	*753.5734*	*365.6899*	*297.0397*	*75.83065*
4.363323	6.382493	5.184321	1.32349446	753.5734	367.5345	300.9917	73.87578
4.363323	6.414688	5.253296	1.28937565	740.4506	367.5966	300.9809	73.90835
4.363323	6.41577	5.253108	1.28994409	739.6811	367.5965	300.9809	73.90839
4.363323	*6.41577*	*5.253107*	*1.28994465*	*739.6812*	*367.5965*	*300.9809*	*73.90839*
4.537856	6.41577	5.253107	1.28994465	739.6812	369.3037	305.2862	71.83981
4.537856	6.445566	5.328249	1.25384124	723.6474	369.3823	305.3012	71.87063
4.537856	6.446938	5.328512	1.25437914	722.7004	369.3823	305.3011	71.87068
4.537856	*6.446937*	*5.32851*	*1.25438005*	*722.7008*	*369.3823*	*305.3011*	*71.87068*
4.712389	6.446937	5.32851	1.25438005	722.7008	370.9493	309.9109	69.73907
4.712389	6.474287	5.408966	1.21717634	703.6628	371.0448	309.9554	69.76967
4.712389	6.475954	5.409742	1.21771038	702.554	371.0448	309.9552	69.76974
4.712389	*6.475953*	*5.409739*	*1.21771173*	*702.5546*	*371.0448*	*309.9552*	*69.76974*
4.886922	6.475953	5.409739	1.21771173	702.5546	372.471	314.8177	67.63079
4.886922	6.500845	5.494605	1.18037988	680.5819	372.5836	314.8952	67.66305
4.886922	6.50281	5.495957	1.18094302	679.3338	372.5835	314.8949	67.66316
4.886922	*6.502809*	*5.495953*	*1.18094494*	*679.3347*	*372.5835*	*314.8949*	*67.66316*
5.061455	6.502809	5.495953	1.18094494	679.3347	373.8686	319.9549	65.57647
5.061455	6.525237	5.584267	1.14452532	654.6842	373.9983	320.0693	65.61259
5.061455	6.527502	5.586263	1.14515562	653.3242	373.9983	320.069	65.61274
5.061455	*6.527501*	*5.586258*	*1.14515825*	*653.3253*	*373.9983*	*320.069*	*65.61274*
5.235988	6.527501	5.586258	1.14515825	653.3253	375.1406	325.2672	63.64015
5.235988	6.547438	5.676983	1.1107302	626.4539	375.2875	325.422	63.68243
5.235988	6.550002	5.679685	1.11146808	625.0108	375.2875	325.4217	63.68263
5.235988	*6.550002*	*5.67968*	*1.11147158*	*625.0121*	*375.2875*	*325.4217*	*63.68263*
5.410521	6.550002	5.67968	1.11147158	625.0121	376.282	330.6921	61.88578

5.410521	6.567359	5.771666	1.08011055	596.5758	376.4458	330.8905	61.93637
5.410521	6.570218	5.775129	1.0809935	595.0768	376.4458	330.8902	61.93663
5.410521	*6.570219*	*5.775123*	*1.08099808*	*595.0783*	*376.4458*	*330.8902*	*61.93663*
5.585054	6.570219	5.775123	1.08099808	595.0783	377.2815	336.1563	60.37335
5.585054	6.584804	5.867034	1.05371374	565.9191	377.4614	336.3999	60.43374
5.585054	6.587944	5.871286	1.05476768	564.3881	377.4614	336.3996	60.43408
5.585054	*6.587945*	*5.871281*	*1.05477357*	*564.3894*	*377.4614*	*336.3996*	*60.43408*
5.759586	6.587945	5.871281	1.05477357	564.3894	378.1171	341.5666	59.15346
5.759586	6.599389	5.961461	1.0324226	535.5161	378.3108	341.8538	59.22372
5.759586	6.602769	5.966475	1.03364891	533.9746	378.311	341.8537	59.22415
5.759586	*6.602772*	*5.966473*	*1.03365632*	*533.9757*	*378.311*	*341.8537*	*59.22415*
5.934119	6.602772	5.966473	1.03365632	533.9757	378.7486	346.7948	58.25971
5.934119	6.610409	6.052711	1.01682375	506.5514	378.9504	347.1173	58.33745
5.934119	6.613933	6.058339	1.01818058	505.0295	378.9507	347.1174	58.33796
5.934119	*6.613938*	*6.058341*	*1.01818944*	*505.0299*	*378.9507*	*347.1174*	*58.33796*
6.108652	6.613938	6.058341	1.01818944	505.0299	379.1034	351.6495	57.69873
6.108652	6.616602	6.137441	1.00703276	480.3942	379.3006	351.9836	57.77751
6.108652	6.620044	6.143273	1.00840778	478.9604	379.301	351.9841	57.77805
6.108652	*6.620052*	*6.143281*	*1.00841723*	*478.9599*	*379.301*	*351.9841*	*57.77805*
6.283185	6.620052	6.143281	1.00841723	478.9599	379.0512	355.8224	57.43737
6.283185	6.615691	6.210273	1.00247122	458.7368	379.2157	356.1132	57.50476
6.283185	6.618563	6.215347	1.00364737	457.5674	379.2161	356.1137	57.50518
6.283185	*6.61857*	*6.215357*	*1.00365472*	*457.5662*	*379.2161*	*356.1137*	*57.50518*
6.457718	6.61857	6.215357	1.00365472	457.5662	378.3582	358.7927	57.38926
6.457718	6.603597	6.262113	1.00163161	443.9394	378.4354	358.9292	57.42733
6.457718	6.604943	6.264496	1.00229595	443.4417	378.4355	358.9293	57.42742
6.457718	*6.604945*	*6.264498*	*1.00229759*	*443.4413*	*378.4355*	*358.9293*	*57.42742*
6.632251	6.604945	6.264498	1.00229759	443.4413	376.629	359.6975	57.41825
6.632251	6.573416	6.277905	1.00213752	439.6433	376.545	359.5223	57.42213
6.632251	6.571951	6.274848	1.00220525	440.5179	376.5453	359.5228	57.4223
6.632251	*6.571955*	*6.274856*	*1.00220819*	*440.5165*	*376.5453*	*359.5228*	*57.4223*
6.806784	6.571955	6.274856	1.00220819	440.5165	373.3435	357.3731	57.43374
6.806784	6.516073	6.237337	1.00240789	451.0774	373.1091	356.8768	57.47403
6.806784	6.511982	6.228674	1.00311112	453.693	373.1113	356.8808	57.47526
6.806784	*6.512021*	*6.228745*	*1.00313245*	*453.6787*	*373.1113*	*356.8808*	*57.47526*
6.981317	6.512021	6.228745	1.00313245	453.6787	368.2988	351.1717	57.67365
6.981317	6.428026	6.129102	1.00659501	482.5053	368.1458	350.7656	57.89365
6.981317	6.425357	6.122014	1.01043479	485.41	368.1476	350.7688	57.89395
6.981317	*6.425388*	*6.122071*	*1.01044011*	*485.3914*	*368.1476*	*350.7688*	*57.89395*
7.15585	6.425388	6.122071	1.01044011	485.3914	362.2283	342.1742	58.77039

7.15585	6.322076	5.972066	1.0257368	531.0764	362.3656	342.2476	59.14877
7.15585	6.324472	5.973347	1.0323408	531.804	362.3652	342.2468	59.1482
7.15585	*6.324465*	*5.973333*	*1.03233087*	*531.7954*	*362.3652*	*342.2468*	*59.1482*
7.330383	6.324465	5.973333	1.03233087	531.7954	356.3149	332.3564	61.03972
7.330383	6.218868	5.800714	1.06534409	586.6305	356.6827	332.8202	61.37922
7.330383	6.225287	5.808807	1.07126953	584.3729	356.6824	332.8187	61.38011
7.330383	*6.225281*	*5.808781*	*1.07128504*	***584.3711***	***356.6824***	***332.8187***	***61.38011***

Se observă din tabelul 3.4 că metoda *Newton-Raphson* este o metodă convergentă care asigură un grad ridicat de precizie după numai trei paşi, valorile obţinute pentru $\varphi_1=60^0$ şi pentru $\varphi_{37}=420^0$, sunt identice, ceea ce arată că erorile de calcul de la un pas la celălalt *nu se cumulează.* În figura 3.4 este prezentată grafic variaţia cursei presei (parametrul s_k).

Se observă din această diagramă că variaţia lui s_k în zona dată de unghiurile $\varphi_1 \ldots \varphi_{24}$ *este foarte redusă* ceea ce este o caracteristică a presei de precizie.

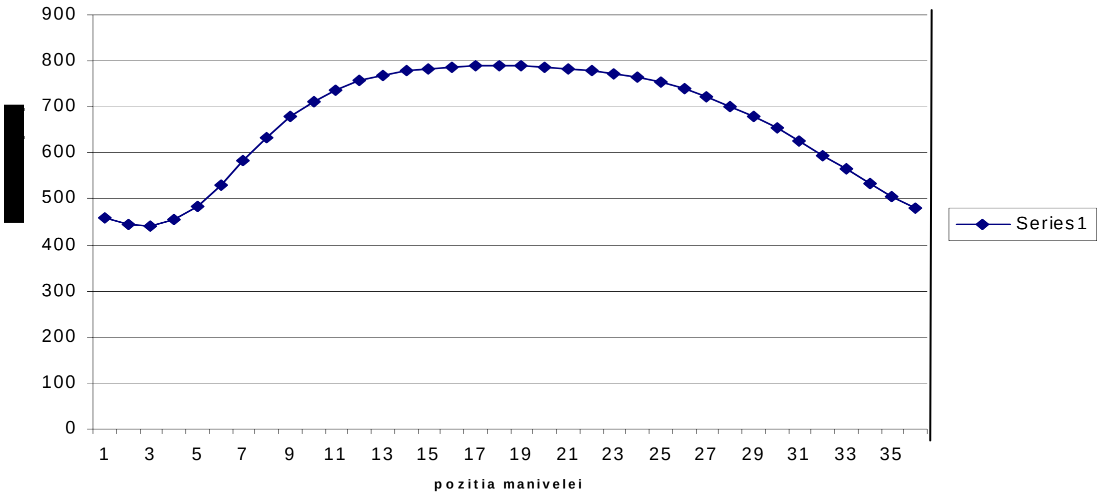


Fig. 3.4

3.3. Metoda gradientului sau metoda de cea mai mare pantă

Fie sistemul de ecuații neliniare:

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,x_3,...,x_n)=0 \\ f_2(x_1,x_2,x_3,...,x_n)=0 \\ .... \\ f_n(x_1,x_2,x_3,...,x_n)=0 \end{cases} \tag{3.39}$$

sau matriceal: $\{F(x)\}=0$ (3.40)

Funcțiile $f_i(x_1,x_2,x_3,..,x_n)$ sunt derivabile cu derivatele de ordinul întâi continue pe domeniul de definiție.

Se consideră funcția definită prin:

$$U(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\left[f_i(x_1,x_2,...,x_n)\right]^2$$
$$sau: \quad U(x)=\{F(x)\}^T\{F(x)\} \tag{3.41}$$

unde *U(x)* reprezintă o suprafață de nivel în spațiul *n*-dimensional.

Se consideră un vector de poziție în spațiul *n*-dimensional $(x_1,x_2,...,x_n)$ oarecare:

$$\left\{X^{(0)}\right\}=\left\{x_1^{(0)},x_2^{(0)},x_3^{(0)},..,x_n^{(0)}\right\}^T \tag{3.42}$$

Se definește suprafața de nivel care conține vârful acestui vector, de ecuație: $U(x^{(0)})=\left\{F(x^{(0)})\right\}^T\left\{F(x^{(0)})\right\}$ (3.43)

Dacă se duce normala la suprafața de nivel $U(x^{(0)})$ în punctul M_0 corespunzător vârfului vectorului inițial $\left\{X^{(0)}\right\}$, acestă normală permite obținerea unui nou vector de poziție: $\left\{X^{(1)}\right\}=\left\{x_1^{(1)},x_2^{(1)},x_3^{(1)},..,x_n^{(1)}\right\}^T$ (3.44)

având vârful pe suprafața de nivel $U(x^{(1)})$ ca în figura 3.5.

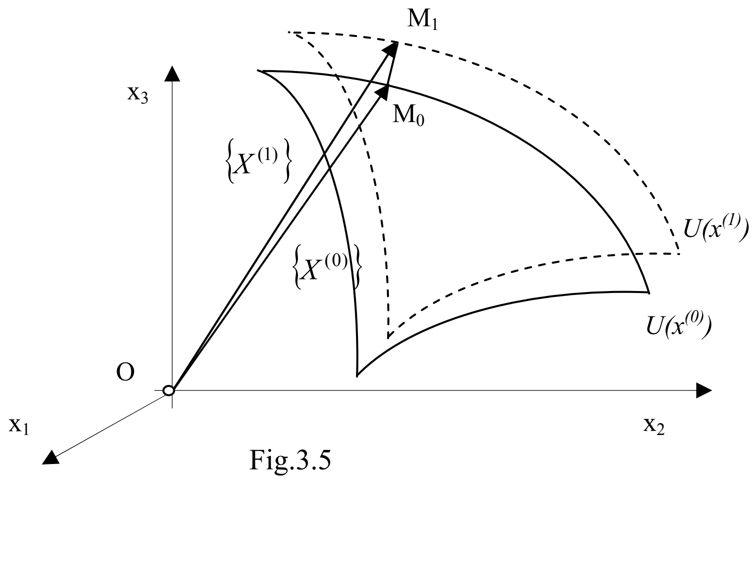


Fig.3.5

Ecuația noului vector de poziție $\{X^{(1)}\}$ se scrie:

$$\{X^{(1)}\} = \{X^{(0)}\} - \lambda_0 \cdot \{grad\, U(x^{(0)})\} \tag{3.45}$$

unde: $$\{grad U(x^{(0)})\} = \left\{ \frac{\partial U(x^{(0)})}{\partial x_1} \; \frac{\partial U(x^{(0)})}{\partial x_2} \; \frac{\partial U(x^{(0)})}{\partial x_3} \; \ldots \; \frac{\partial U(x^{(0)})}{\partial x_n} \right\}^T \tag{3.46}$$

este gradientul funcției $U(x^{(0)})$ calculat în punctul $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ adică un vector normal la suprafața de nivel $U(x^{(0)})$

λ_0 - un factor ce se determină dintr-o condiție de minim.

În mod similar se poate scrie o relație corespunzătoare iterației $k+1$ între vectorul $\{X^{(k+1)}\}$ şi vectorul $\{X^{(k)}\}$:

$$\{X^{(k+1)}\} = \{X^{(k)}\} - \lambda_k \cdot \{grad\, U(x^{(k)})\}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.47}$$

Factorul λ_k se determină din condiția ca funcția $\Phi(\lambda)$ să fie minimă, unde $\Phi(\lambda)$ este definită astfel:

$$\Phi(\lambda) = U\left[x^{(k)} - \lambda\ grad\ U\left(x^{(k)}\right)\right] \tag{3.48}$$

Condiția de minim se scrie:

$$\Phi'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} U\left[x^{(k)} - \lambda\ grad\ U\left(x^{(k)}\right)\right] = 0 \tag{3.49}$$

Ținând seama de (3.46) ecuația (3.49) se scrie sub forma:

$$\begin{aligned} \Phi'(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda} \sum_{i=1}^{n} \left[f_i(x^{(k)}) - \lambda \frac{\partial f_i(x^{(k)})}{\partial x} gradU(x^{(k)}) \right]^2 = \\ &= -2\sum_{i=1}^{n} \left[f_i(x^{(k)}) - \lambda \frac{\partial f_i(x^{(k)})}{\partial x} gradU(x^{(k)}) \right] \times \frac{\partial f_i(x^{(k)})}{\partial x} gradU(x^{(k)}) = 0 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Rezultă:

$$\lambda_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x^{(k)}) \frac{\partial f_i(x^{(k)})}{\partial x} gradU(x^{(k)})}{\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f_i(x^{(k)})}{\partial x} gradU(x^{(k)}) \right]^2} \tag{3.51}$$

Relația (3.3.11) se scrie matriceal astfel:

$$\lambda_k = \frac{\left(\{F(x^{(k)})\},\ [J^{(k)}]\, gradU(x^{(k)})\right)}{\left([J^{(k)}]\, gradU(x^{(k)}),\ [J^{(k)}]\, gradU(x^{(k)})\right)} \tag{3.52}$$

unde jacobianul $[J^{(k)}]$ are expresia:

$$\left[J^{(k)}\right]=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x^{(k)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^{(k)})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x^{(k)})}{\partial x_n} \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial f_n(x^{(k)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x^{(k)})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x^{(k)})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{3.53}$$

Ținând seama de expresiile derivatelor parțiale:

$$\frac{\partial U}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right)^2=2\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \tag{3.54}$$

rezultă expresia gradientului la suprafața *U(x):*

$$\{grad\ U(x)\}=2\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_2}f_i(x),\ \dots,\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_n}f_i(x)\right\}$$
$$sau:\ \{grad\ U(x)\}=2\cdot[J]^T\{F(x)\} \tag{3.55}$$

Ținând seama de relația gradientului (3.3.15), relația (3.3.12) devine:

$$\lambda_k=\frac{1}{2}\frac{\left(\left\{F(x^{(k)})\right\},\ \left[J^{(k)}\right]\left[J^{(k)}\right]^T\left\{F(x^{(k)})\right\}\right)}{\left(\left[J^{(k)}\right]\left[J^{(k)}\right]^T\left\{F(x^{(k)})\right\},\ \left[J^{(k)}\right]\left[J^{(k)}\right]^T\left\{F(x^{(k)})\right\}\right)} \tag{3.56}$$

$$sau\qquad \lambda_k=\frac{1}{2}\frac{\left(\left\{F(x^{(k)})\right\},\ \left\{R(x^{(k)})\right\}\right)}{\left(\left\{R(x^{(k)})\right\},\ \left\{R(x^{(k)})\right\}\right)}$$
$$unde:\ \left\{R(x^{(k)})\right\}=\left[J^{(k)}\right]\left[J^{(k)}\right]^T\left\{F(x^{(k)})\right\} \tag{3.57}$$

Se obține *relația de recurență a metodei de cea mai mare pantă:*

$$\left\{X^{(k+1)}\right\}=\left\{X^{(k)}\right\}-2\lambda_k\cdot\left[J^{(k)}\right]^T\left\{F(x^{(k)})\right\},\qquad k=1,2,3,\dots \tag{3.58}$$

În cazul particular al unui sistem liniar de ecuații se obține:

$$\{F(x)\}=[A]\{X\}-\{B\}=0\ ,$$
$$[J]=[A] \tag{3.59}$$

$$\left\{X^{(k+1)}\right\}=\left\{X^{(k)}\right\}-2\lambda_k\cdot[A]^T\left([A]\left\{x^{(k)}\right\}-\{B\}\right)$$
$$\left\{X^{(k+1)}\right\}=\left\{X^{(k)}\right\}-2\lambda_k\cdot[A]^T\left\{R(x^{(k)})\right\} \tag{3.60}$$

unde s-a notat:

$$\left\{R(x^{(k)})\right\}=[A]\left\{X^{(k)}\right\}-\{B\}\ \text{ reziduul vectorului }\left\{X^{(k)}\right\} \tag{3.61}$$

$$\lambda_k=\frac{1}{2}\frac{\left(\left\{R(x^{(k)})\right\},\ [A][A]^T\left\{R(x^{(k)})\right\}\right)}{\left([A][A]^T\left\{R(x^{(k)})\right\},\ [A][A]^T\left\{R(x^{(k)})\right\}\right)}\qquad k=1,2,3\dots \tag{3.62}$$

4. METODE DE DETERMINARE A VALORILOR ŞI VECTORILOR PROPRII AI UNEI MATRICE

4.1. Valori şi vectori proprii pentru o matrice

Se consideră matricea pătratică [*A*] a unui sistem de *n* ecuaţii liniare cu *n* necunoscute. *Valorile proprii* ale matricei [*A*] (notate $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$) sunt soluţiile *ecuaţiei caracteristice*:

$$det([A]-\lambda[I_n])=0 \tag{4.1}$$

unde: $[I_n]$ este matricea unitate având dimensiunea $n \times n$.

Cunoscând valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ *vectorii proprii* $\{X\}^{(k)}$ ai matricei [*A*] reprezintă soluţiile *ecuaţiei de valori proprii*:

$$[A]\{X\}^{(k)}=\lambda_k\{X\}^{(k)} \tag{4.2}$$

sau soluţiile nenule ale sistemului omogen echivalent cu (4.2):

$$([A]-\lambda_k[I_n])\{X\}^{(k)}=\{0\} \tag{4.3}$$

Determinantul caracteristic al matricei [*A*] este determinatul matricei sistemului de ecuaţii omogen (4.3):

$$D(\lambda)=det([A]-\lambda[I_n])=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \tag{4.4}$$

Ecuaţia caracteristică (4.1) se scrie sub formă polinomială astfel:

$$\lambda^n-\sigma_1\lambda^{n-1}+\sigma_2\lambda^{n-2}-\sigma_3\lambda^{n-3}+\ldots+(-1)^n\sigma_n=0 \tag{4.5}$$

unde coeficienţii polinomiali $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n$ reprezintă suma minorilor de un anumit ordin aflaţi pe diagonala principală a determinantului caracteristic $D(\lambda)$:

$$\sigma_1=\sum_{\alpha=1}^{n}a_{\alpha\alpha};\quad \sigma_2=\sum_{\alpha<\beta}\begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha\beta} \\ a_{\beta\alpha} & a_{\beta\beta}\end{vmatrix};\quad \sigma_3=\sum_{\alpha<\beta<\gamma}\begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha\beta} & a_{\alpha\gamma} \\ a_{\beta\alpha} & a_{\beta\beta} & a_{\beta\gamma} \\ a_{\gamma\alpha} & a_{\gamma\beta} & a_{\gamma\gamma}\end{vmatrix}\ldots \tag{4.6}$$

$$\ldots \quad \sigma_n=det[A]$$

Numărul minorilor diagonali de ordinul k este C_n^k iar numărul total de determinanți ce trebuiesc calculați este:

$$N = \sum_{k=1}^{n} C_n^k = 2^n - 1 \tag{4.7}$$

Calculul valorilor proprii ale matricei [A] folosind relațiile (4.5) şi (4.6) este laborios, de aceea se folosesc metodele numerice prezentate în continuare.

4.2. Metoda Danilevski

Metoda Danilevski constă în transformarea determinantului caracteristic *D(λ)* al matricei [A]:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \dots & a_{3,n} \\ . & . & . & \dots & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n}-\lambda \end{vmatrix} \tag{4.8}$$

într-o formă echivalentă, numită *forma normală a lui Frobenius*:

$$D^*(\lambda) = \begin{vmatrix} p_1-\lambda & p_2 & p_3 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \tag{4.9}$$

Dacă se dezvoltă acest determinant după prima linie se obține ecuația caracteristică sub forma:

$$D^*(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - p_3\lambda^{n-3} - \dots - p_{n-1}\lambda - p_n) \tag{4.10}$$

Matricea Frobenius corespunzătoare matricei [A] se defineşte astfel:

$$[P] = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

Matricea Frobenius este o matrice care are acelaşi polinom caracteristic ca şi matricea [A], adică:

$$det([A] - \lambda[I_n]) = det([P] - \lambda[I_n]) \tag{4.12}$$

Pentru a se obține matricea Frobenius [P] se parcurg următorii paşi:

Primul pas constă în efectuarea de transformări liniare asupra matricei [A] sau combinaţii ale liniilor sale, astfel încât să se obţină în locul ultimei linii elementele: [0 0 ... 0 1 0].

Fie matricea [A] :

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ . & . & . & \dots & . & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

pentru care se consideră linia de pivotare n (pentru operaţiile care urmează).

În matricea unitate [I_n] se modifică linia n-1 astfel încât se obţine :

$$[M]_{n-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \dots & m_{n-1,n-1} & m_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

unde elementele de pe linia n-1 a matricei $[M]_{n-1}$ se calculează folosind elementele situate pe linia de pivotare n a matricei [A] cu ajutorul relaţiilor:

$$m_{n-1,i}=-\frac{a_{ni}}{a_{n,n-1}};\quad m_{n-1,n-1}=\frac{1}{a_{n,n-1}} \tag{4.15}$$

Dacă se multiplică matricea [A] cu matricea $[M]_{n-1}$, se obţine o matrice care are pe ultima linie elementele [0 0 ... 0 1 0]:

$$[B]=[A][M]_{n-1}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1,n} \\ b_{21} & b_{21} & \dots & b_{2,n-1} & b_{2,n} \\ . & . & \dots & . & . \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \dots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

unde elementele b_{ij} se calculează astfel:

$$\begin{aligned} & b_{ij}=a_{ij}+a_{i,n-1}m_{n-1,j}; && 1\le i\le n;\ j\ne n-1 \\ & b_{j,n-1}=a_{i,n-1}+a_{i,n-1}m_{n-1,n-1}; && 1\le i\le n; \end{aligned} \tag{4.17}$$

Se poate verifica că inversa matricei (4.14) este de forma:

$$[M]_{n-1}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

$$[M]_{n-1}[M]_{n-1}^{-1}=[I] \tag{4.19}$$

Dacă se multiplică matricea [B] la stânga cu matricea $[M]_{n-1}^{-1}$ se obține matricea [C]:

$$[C]=[M]_{n-1}^{-1}[B]=[M]_{n-1}^{-1}[A][M]_{n-1}$$

$$[C]=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1,n-1} & c_{1,n} \\ c_{21} & c_{21} & \dots & c_{2,n-1} & c_{2,n} \\ . & . & \dots & . & . \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \dots & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

unde elementele c_{ij} se calculează astfel:

$$c_{ij}=b_{ij};\quad c_{n-1,j}=\sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{kj} \tag{4.21}$$

Se poate demonsrtra că matricea [C] astfel obținută are acelaşi determinant cu cel al matricei [A].

Pasul al doilea foloseşte acelaşi algoritm prezentat la *pasul 1* însă pentru matricea [C], considerând în acest caz linia de pivotare *n-1,* linia *n* rămânând neschimbată.

În matricea unitate [I_n] se modifică linia *n-2* astfel încât se obține matricea:

$$[M]_{n-2}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ m_{n-2,1} & m_{n-2,2} & \dots & m_{n-2,n-1} & m_{n-2,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

unde elementele de pe linia *n-2* a matricei $[M]_{n-2}$ se calculează folosind elementele situate pe linia de pivotare *n-1* a matricei [C] cu ajutorul relațiilor:

$$m_{n-2,i}=-\frac{c_{n-1,i}}{c_{n-1,n-2}};\quad m_{n-2,n-2}=\frac{1}{c_{n-1,n-2}} \tag{4.23}$$

matricea inversă $[M]_{n-2}^{-1}$ are expresia

$$[M]_{n-2}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \dots & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

Dacă se multiplică matricea [C] la stânga cu matricea $[M]_{n-2}^{-1}$ şi la dreapta cu $[M]_{n-2}$ se obține matricea [D]:

Rezultă matricea :

$$[D]=[M]_{n-2}^{-1}[C][M]_{n-2}$$

$$[D]=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & ... & d_{1,n-2} & d_{1,n-1} & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & ... & d_{2,n-2} & d_{2,n-1} & d_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ d_{n-2,1} & d_{n-2,1} & ... & d_{n-2,1} & d_{n-2,1} & d_{n-2,1} \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

Pentru ***paşii 3, 4, ..., n*** se repetă algoritmul prezentat, în final obţinându-se *matricea Frobenius* care are acelaşi determinant caracteristic cu cel al matricei [A]:

$$[P]=[M]_1^{-1}[M]_2^{-1}\ ...\ [M]_{n-2}^{-1}[M]_{n-1}^{-1}[A][M]_{n-1}[M]_{n-2}...[M]_2[M]_1$$

$$[P]=\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

Fie λ o valoare proprie a matricei [P] şi $\{Y\}$ vectorul propriu corespunzător valorii proprii λ satisface ecuaţia matriceală:

$$[P]\{Y\}=\lambda\{Y\} \tag{4.27}$$

Relaţia matriceală (4.26) se mai scrie sub forma:

$$([P]-\lambda[I]_n)\{Y\}=\{0\} \tag{4.27'}$$

sau:

$$\begin{bmatrix} p_1-\lambda & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & -\lambda & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ ... \\ y_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.28}$$

Ecuaţia matriceală (4.28) reprezintă un sistem omogen de n ecuaţii care admite soluţii nebanale dacă determinantul său este nul.

Anulând determinantul sistemului (4.26) se obţine *determinantul caracteristic al matricei Frobenius* (4.9) sau *forma normală a lui Frobenius.* Sistemul (4.28) se mai scrie:

$$\begin{cases} (p_1-\lambda)y_1+p_2y_2+p_3y_3+...+p_ny_n=0 \\ y_1-\lambda\, y_2=0 \\ y_2-\lambda y_3=0 \\ ...\quad y_{n-1}-\lambda y_n=0 \end{cases} \tag{4.29}$$

Alegând în sistemul (4.29) $y_n=1$ se obține o soluție a sistemului omogen care reprezintă elementele vectorului propriu {*Y*} al matricei *Frobenius* [*P*]:

$$y_n = 1;\ y_{n-1} = \lambda;\ y_{n-2} = \lambda^2;\ \ y_{n-3} = \lambda^3;\ \dots\ ; y_1 = \lambda^{n-1} \tag{4.30}$$

Vectorul propriu al matricei [*A*] corespunzător valorii proprii λ_k se determină folosind relația:

$$\{X\}^{(k)} = [M]_{n-1}[M]_{n-2}\dots[M]_2[M]_1\{Y\}^{(k)} \tag{4.31}$$

Aplicația 4.1

Folosind metoda Danilevski să se determine valorile şi vectorii proprii ai matricei:

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ -4 & -8 & -2 \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

Pasul 1. Conform relațiilor (4.14) şi (4.18) matricele $[M]_2$ şi $[M]_2^{-1}$ sunt:

$$[M]_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\quad [M]_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{4.33}$$

unde elementele matricei $[M]_2$ se determină conform relațiilor (4.15):

$$m_{21} = -\frac{a_{31}}{a_{32}} = -\frac{1}{2};\quad m_{22} = \frac{1}{a_{32}} = -\frac{1}{8};\quad m_{23} = -\frac{a_{33}}{a_{32}} = -\frac{1}{4} \tag{4.34}$$

După înlocuire rezultă:

$$[M]_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\quad [M]_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{4.35}$$

Se poate verifica dacă: $[M]_2[M]_2^{-1} = [I]$ (4.36)

Matricea [*C*] se obține folosind relația (4.20):

$$[C] = [M]_2^{-1}[A][M]_2 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 & -1/8 & -1/4 \\ 18 & -5/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

Pasul 2. Conform relațiilor (4.22) şi (4.24) matricele $[M]_1$ şi $[M]_1^{-1}$ au expresiile:

$$[M]_1 = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\quad [M]_1^{-1} = \begin{bmatrix} c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{4.38}$$

Elementele matricei $[M]_1$ se determină conform relațiilor (4.23):

$$m_{11}=\frac{1}{c_{21}}=\frac{1}{18};\quad m_{12}=-\frac{c_{22}}{c_{21}}=\frac{5}{36};\quad m_{13}=-\frac{c_{23}}{c_{21}}=\frac{1}{18} \tag{4.39}$$

După înlocuire, rezultă:

$$[M]_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{18} & \frac{5}{36} & \frac{1}{18}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix};\quad [M]_1^{-1}=\begin{bmatrix}18 & -\frac{5}{2} & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}; \tag{4.40}$$

Se poate verifica dacă: $[M]_1[M]_1^{-1}=[I]$ (4.41)

Matricea [*D*] care se obține la acest pas este *matricea Frobenius*:

$$[P]=[D]=[M]_1^{-1}[C][M]_1=\begin{bmatrix}0 & 3 & -2\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \tag{4.42}$$

Determinantul caracteristic al matricei [*P*] se scrie conform (4.9):

$$D^*(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda & 3 & -2\\ 1 & -\lambda & 0\\ 0 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+3\lambda-2 \tag{4.43}$$

Valorile proprii ale matricei [*P*] sunt rădăcinile ecuației *D(λ)=0:*

$$\lambda_1=-2;\ \lambda_2=\lambda_3=1 \tag{4.44}$$

Vectorii proprii ai matricei [*P*] corespunzători valorilor proprii λ_1, λ_2, λ_3 sunt:

$$\{Y\}^{(1)}=\begin{Bmatrix}\lambda_1^2\\ \lambda_1\\ 1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}4\\ -2\\ 1\end{Bmatrix};\qquad \{Y\}^{(2)}=\{Y\}^{(3)}=\begin{Bmatrix}\lambda_2^2\\ \lambda_2\\ 1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{Bmatrix} \tag{4.45}$$

Vectorii proprii ai matricei [*A*] se determină cu ajutorul relației (4.31):

$$\begin{aligned}&\{X\}^{(1)}=[M]_2[M]_1\{Y\}^{(1)};\\ &\{X\}^{(2)}=\{X\}^{(3)}=[M]_2[M]_1\{Y\}^{(2)}\end{aligned} \tag{4.45}$$

Dacă se efectuează calculele se obține:

$$[M]_2[M]_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{18} & \frac{5}{36} & \frac{1}{18}\\ -\frac{1}{36} & -\frac{7}{36} & -\frac{10}{36}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{4.46}$$

Înlocuind în expresiile (4.45) rezultă vectorii proprii ai matricei [A]:

$$\{X\}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & \frac{5}{36} & \frac{1}{18} \\ -\frac{1}{36} & -\frac{7}{36} & -\frac{10}{36} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{4.47}$$

$$\{X\}^{(2)} = \{X\}^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & \frac{5}{36} & \frac{1}{18} \\ -\frac{1}{36} & -\frac{7}{36} & -\frac{10}{36} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{4.48}$$

Ținând seama de definiția (4.2) a vectorilor şi valorilor proprii, se pot verifica rezultatele obținute pentru $\lambda_1 = -2;\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ şi pentru vectorii proprii corespunzători dați de relațiile (4.47) şi (4.48) :

$$[A]\{X\}^{(1)} = \lambda_1\{X\}^{(1)}:$$

$$[A]\{X\}^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ -4 & -8 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = -2\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$[A]\{X\}^{(2)} = \lambda_2\{X\}^{(2)}: \tag{4.49}$$

$$[A]\{X\}^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ -4 & -8 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$[A]\{X\}^{(3)} = \lambda_3\{X\}^{(3)}$$

4.3. Metoda Krylov

Metoda *Krylov* are la bază determinarea *valorilor şi vectorilor proprii* prin rezolvarea unui sistem de ecuaţii având *vectorii Krylov* drept coloane ale matricei caracteristice şi ale matricei coloană a termenilor liberi,: $\{Y\}^{(0)}$, $\{Y\}^{(1)}$, ... , $\{Y\}^{(n-1)}$ respectiv $\{Y\}^{(n)}$, vectori care se determină prin iteraţii cu ajutorul matricei [*A*].

Pentru aplicarea acestei metode se parcurg următoarii patru paşi:

Pas 1: Se alege un *vector Krylov iniţial* oarecare $\{Y\}^{(0)}$; (4.50)

Pas 2: Se calculează *vectorii lui Krylov* prin iteraţii succesive conform relaţiilor:

$$\begin{aligned} &\{Y\}^{(1)} = [A]\{Y\}^{(0)};\\ &\{Y\}^{(2)} = [A]\{Y\}^{(1)};\\ &\{Y\}^{(3)} = [A]\{Y\}^{(2)};\\ &.\quad\quad .\quad\quad .\\ &\{Y\}^{(n)} = [A]\{Y\}^{(n-1)}. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Pas 3: Se rezolvă sistemul de ecuaţii liniare scrise cu ajutorul *vectorilor Krylov:*

$$\begin{bmatrix} y_1^{(n-1)} & y_1^{(n-2)} & . & . & y_1^{(1)} & y_1^{(0)} \\ y_2^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} & . & . & y_2^{(1)} & y_2^{(0)} \\ y_3^{(n-1)} & y_3^{(n-2)} & . & . & y_3^{(1)} & y_3^{(0)} \\ . & . & . & . & . & . \\ y_n^{(n-1)} & y_n^{(n-2)} & . & . & y_n^{(1)} & y_n^{(0)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ ... \\ k_n \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} y_1^{(n)} \\ y_2^{(n)} \\ y_3^{(n)} \\ ... \\ y_n^{(n)} \end{Bmatrix} \tag{4.52}$$

Pas 4: Coeficienţii *polinomului caracteristic* al matricei [*A*] sunt necunoscutele sistemului (4.52), deci acest polinom se scrie:

$$D(\lambda) = (-1)^n \left(\lambda^n + k_1\lambda^{n-1} + k_2\lambda^{n-2} + ... + k_n\right) \tag{4.53}$$

Rădăcinile *polinomului caracteristic* dat de relaţia (4.53) sunt *valorile proprii ale matricei* [*A*].

Pentru a demonstra această proprietate se consideră determinantul caracteristic al matricei [*A*] scris sub forma:

$$D(\lambda) = det([A] - \lambda[I]_n) = (-1)^n \left(\lambda^n + k_1\lambda^{n-1} + k_2\lambda^{n-2} + ... + k_n\right) \tag{4.54}$$

Folosind identitatea *Hamilton-Cayley* în care matricea [*A*] anulează polinomul său caracteristic:

$$[A]^n + k_1[A]^{n-1} + k_2[A]^{n-2} + ... + k_n[I]_n = 0 \tag{4.55}$$

şi multiplicând ecuaţia matriceală (4.55) cu un vector oarecare $\{Y\}^{(0)}$ se obţine:

$$[A]^n\{Y\}^{(0)} + k_1[A]^{n-1}\{Y\}^{(0)} + k_2[A]^{n-2}\{Y\}^{(0)} + ... + k_n\{Y\}^{(0)} = 0 \tag{4.56}$$

Notând: $$[A]^k\{Y\}^{(0)} = \{Y\}^{(k)} \tag{4.57}$$

atunci relaţia (4.56) se mai scrie sub forma:

$$k_1\{Y\}^{(n-1)} + k_2\{Y\}^{(n-3)} + ... + k_n\{Y\}^{(0)} = -\{Y\}^{(n)} \tag{4.58}$$

care este identică cu sistemul de ecuații (4.52) :

$$\begin{cases} k_1 y_1^{(n-1)} + k_2 y_1^{(n-2)} + k_3 y_1^{(n-3)} + ... + k_n y_1^{(0)} = -y_1^{(n)} \\ k_1 y_2^{(n-1)} + k_2 y_2^{(n-2)} + k_3 y_2^{(n-3)} + ... + k_n y_2^{(0)} = -y_2^{(n)} \\ .... \\ k_1 y_n^{(n-1)} + k_2 y_n^{(n-2)} + k_3 y_n^{(n-3)} + ... + k_n y_n^{(0)} = -y_n^{(n)} \end{cases} \tag{4.59}$$

Proprietatea (4.53) este demonstrată.

În sistemul de ecuații (4.59) coeficienții $y_i^{(k)}$ sunt elementele vectorilor lui Krâlov:

$$\begin{aligned} &\{Y\}^{(1)} = [A]\{Y\}^{(0)}; \\ &\{Y\}^{(2)} = [A]\{Y\}^{(1)} = [A]^2\{Y\}^{(0)}; \\ &... \\ &\{Y\}^{(n)} = [A]\{Y\}^{(n-1)} = [A]^k\{Y\}^{(0)} \end{aligned} \tag{4.60}$$

care se mai pot scrie astfel:

$$\begin{cases} y_i^{(1)} = a_{i1} y_i^{(0)} + a_{i2} y_i^{(0)} + a_{i3} y_i^{(0)} + ... + a_{in} y_i^{(0)} \\ y_i^{(2)} = a_{i1} y_i^{(1)} + a_{i2} y_i^{(1)} + a_{i3} y_i^{(1)} + ... + a_{in} y_i^{(1)} \\ .... \\ y_i^{(n)} = a_{i1} y_i^{(n-1)} + a_{i2} y_i^{(n-1)} + a_{i3} y_i^{(n-1)} + ... + a_{in} y_i^{(n-1)} \end{cases} \tag{4.61}$$

$i = 1, 2, 3, ..., n$

Se face ipoteza că toate rădăcinile polinomului caracteristic (4.53) sunt distincte $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq ... \neq \lambda_n$.

Vectorii *Krylov* utilizați pentru determinarea coeficienților polinomului caracteristic $k_1, k_2, k_3, ... , k_n$ se scriu conform (4.51) astfel:

$\{Y\}^{(0)}$; $\{Y\}^{(1)} = [A]\{Y\}^{(0)}$; $\{Y\}^{(2)} = [A]\{Y\}^{(1)}$; $\{Y\}^{(3)} = [A]\{Y\}^{(2)}$; .... $\{Y\}^{(n)} = [A]\{Y\}^{(n-1)}$

Întrucât vectorul inițial $\{Y\}^{(0)}$ este un vector oarecare, se poate lua acest vector ca o combinație liniară de vectori proprii $\{X\}^{(i)}$ ai matricei $[A]$:

$$\{Y\}^{0)} = \sum_{i=1}^{n} c_i \{X\}^{(i)} \tag{4.62}$$

Ținând seama de proprietățile (4.2) ale vectorilor proprii:

$$\begin{cases} [A]\{X\}^{(i)} = \lambda_i \{X\}^{(i)} \\ [A]^2\{X\}^{(i)} = \lambda_i^2 \{X\}^{(i)} \\ .... \\ [A]^n\{X\}^{(i)} = \lambda_i^n \{X\}^{(i)} \end{cases} \qquad i = 1,2,3,...,n \tag{4.63}$$

rezultă că vectorii Krylov se pot scrie sub forma următoarelor combinații liniare de vectori proprii $\{X\}^{(i)}$ ai matricei $[A]$:

$$\begin{cases} \{Y\}^{(0)} = c_1\{X\}^{(1)} + c_2\{X\}^{(2)} + ... + c_n\{X\}^{(n)} \\ \{Y\}^{(1)} = c_1\lambda_1\{X\}^{(1)} + c_2\lambda_2\{X\}^{(2)} + ... + c_n\lambda_n\{X\}^{(n)} \\ \{Y\}^{(2)} = c_1\lambda_1^2\{X\}^{(1)} + c_2\lambda_2^2\{X\}^{(2)} + ... + c_n\lambda_n^2\{X\}^{(n)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \{Y\}^{(n-1)} = c_1\lambda_1^{n-1}\{X\}^{(1)} + c_2\lambda_2^{n-1}\{X\}^{(2)} + ... + c_n\lambda_n^{n-1}\{X\}^{(n)} \end{cases} \quad (4.64)$$

Se consideră funcţiile polinomiale $\varphi_i(\lambda)$ de gradul $n-1$ definite astfel:

$$\varphi_i(\lambda) = \lambda^{n-1} + q_{1i}\lambda^{n-2} + ... + q_{n-2,i}\lambda + q_{n-1,i} \quad i=1,2,3,..,n \quad (4.65)$$

Înmulţind ecuaţiile (4.64) respectiv cu coeficienţii:

$$q_{n-1,i},\ q_{n-2,i},\ ...,\ q_{2,i},\ q_{1,i}, 1 \qquad i=1,2,3,..,n \quad (4.66)$$

şi însumândule membru cu membru rezultă următoarele relaţii:

$$\begin{aligned} &\{Y\}^{(n-1)} + q_{1i}\{Y\}^{(n-2)} + ... + q_{n-1,i}\{Y\}^{(0)} = \\ &= c_1\varphi_i(\lambda_1)\{X\}^{(1)} + c_2\varphi_i(\lambda_2)\{X\}^{(2)} + ... + c_n\varphi_i(\lambda_n)\{X\}^{(n)} \end{aligned} \quad (4.67)$$

$i=1,2,3,..,n$

Se consideră că funcţiile polinomiale $\varphi_i(\lambda)$ au aceleaşi rădăcini cu cele ale polinomului caracteristic $D(\lambda)$ cu excepţia rădăcinii λ_i , deci $\varphi_i(\lambda)$ se poate scrie:

$$\varphi_i(\lambda) = \frac{D(\lambda)}{\lambda - \lambda_i}, \qquad \lambda \neq \lambda_i \quad (4.68)$$

În acest caz funcţiile polinomiale $\varphi_i(\lambda)$ au proprietăţile:

$$\begin{aligned} &\varphi_i(\lambda_j) = 0 \quad \text{pentru } i \neq j; \\ &\varphi_i(\lambda_i) \neq 0 \end{aligned} \quad (4.69)$$

Ţinând seama de proprietăţile (4.69) atunci relaţiile (4.67) se scriu:

$$c_i\varphi_i(\lambda_i)\{X\}^{(i)} = \{Y\}^{(n-1)} + q_{1i}\{Y\}^{(n-2)} + ... + q_{n-1,i}\{Y\}^{(0)} \quad (4.70)$$

Rezultatul obţinut (4.70) arată că vectorii proprii $\{X\}^{(i)}$ se scriu sub forma unor combinaţii liniare ale vectorilor lui *Krylov:* $\{Y\}^{(n-1)}, \{Y\}^{(n-2)}, ..., \{Y\}^{(0)}$.

Coeficienţii $q_{j,i}$ din relaţia (4.70) se determină prin identificarea celor două relaţii (4.65) şi (4.68) folosind schema lui Horner:

$$q_{0i}\lambda^{n-1} + q_{1i}\lambda^{n-2} + ... + q_{n-2,i}\lambda + q_{n-1,i} = \frac{\lambda^n + k_1\lambda^{n-1} + ... + k_{n-1}\lambda + k_n}{\lambda - \lambda_i}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} q_{0i} = 1 \\ q_{ji} = \lambda_i q_{j-1,i} + k_j \end{cases} \qquad j = 1,2,3,...,n \quad (4.71)$$

Aplicația 4.2

Folosind *metoda Krylov* să se determine valorile şi vectorii proprii ai matricei:

$$[A]=\begin{bmatrix}7 & -2 & 0\\ -2 & 6 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{bmatrix} \tag{4.72}$$

Rezolvare

Se alege un vector inițial oarecare $\{Y\}^{(0)}=\{1 \quad 0 \quad 1\}^t$ şi se determină *vectorii Krylov:*

$$\{Y\}^{(1)}=[A]\{Y\}^{(0)}=\begin{bmatrix}7 & -2 & 0\\ -2 & 6 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}7\\-2\\0\end{Bmatrix}$$

$$\{Y\}^{(2)}=[A]\{Y\}^{(1)}=\begin{bmatrix}7 & -2 & 0\\ -2 & 6 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}7\\-2\\0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}53\\-26\\4\end{Bmatrix} \tag{4.73}$$

$$\{Y\}^{(3)}=[A]\{Y\}^{(2)}=\begin{bmatrix}7 & -2 & 0\\ -2 & 6 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}53\\-26\\4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}423\\-270\\72\end{Bmatrix}$$

Ecuația matriceală (4.58) se scrie în acest caz:

$$k_1\{Y\}^{(2)}+k_2\{Y\}^{(1)}+k_3\{Y\}^{(0)}=-\{Y\}^{(3)} \tag{4.74}$$

sau sub forma matriceală:

$$\begin{bmatrix}53 & 7 & 1\\ -26 & -2 & 0\\ 4 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}423\\-270\\72\end{Bmatrix} \tag{4.75}$$

Rezolvând (4.75) se obțin valorile coeficienților ecuației caracteristice:

$$k_1=-18\,,\quad k_2=99,\quad k_3=-162 \tag{4.76}$$

Ecuația caracteristică a matricei [*A*] se scrie:

$$\lambda^3-18\,\lambda^2+99\lambda-162=0 \tag{4.77}$$

Soluțiile ecuației (4.77) sunt *valorile proprii* ale matricei [*A*]:

$$\lambda_1=3;\qquad \lambda_2=6;\qquad \lambda_3=9. \tag{4.78}$$

Pentru determinarea *vectorilor proprii* ai matricei [*A*] se folosesc relațiile (4.70):

$$c_i\varphi_i(\lambda_i)\{X\}^{(i)}=\{Y\}^{(2)}+q_{1i}\{Y\}^{(1)}+q_{2i}\,\{Y\}^{(0)},\qquad i=1,2,3. \tag{4.79}$$

Expresiile funcțiilor $\varphi_i(\lambda)$ sunt de forma:

$$\varphi_i(\lambda) = q_{0i}\lambda^2 + q_{1i}\lambda + q_{2i} \tag{4.80}$$

respectiv:

$$\begin{cases} \varphi_1(\lambda) = (\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3) = \lambda^2 - 15\lambda + 54; & \varphi_1(\lambda_1) = 18 \\ \varphi_2(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_3) = \lambda^2 - 12\lambda + 27; & \varphi_2(\lambda_2) = -9 \\ \varphi_3(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = \lambda^2 - 9\lambda + 18; & \varphi_3(\lambda_3) = 18 \end{cases} \tag{4.81}$$

Identificând expresiile (4.80) şi (4.81) se obţin coeficienţii q_{ij}:

$$\begin{cases} q_{01} = 1;\ q_{11} = -15;\ \ q_{21} = 54; \\ q_{02} = 1;\ q_{12} = -12;\ \ q_{22} = 27; \\ q_{03} = 1;\ q_{13} = -9;\ \ q_{23} = 18 \end{cases} \tag{4.82}$$

Relaţiile (4.79) devin:

$$\begin{cases} c_1\varphi_1(\lambda_1)\{X\}^{(1)} = \{Y\}^{(2)} - 15\{Y\}^{(1)} + 54\{Y\}^{(0)} \\ c_2\varphi_2(\lambda_2)\{X\}^{(2)} = \{Y\}^{(2)} - 12\{Y\}^{(1)} + 27\{Y\}^{(0)} \\ c_3\varphi_3(\lambda_3)\{X\}^{(3)} = \{Y\}^{(2)} - 9\{Y\}^{(1)} + 18\{Y\}^{(0)} \end{cases} \tag{4.83}$$

Înlocuind expresiile vectorilor Krîlov (4.73) în relaţiile (4.83) se obţin vectorii proprii ai matricei $[A]$:

$$\begin{aligned} 18c_1\{X\}^{(1)} &= \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{X\}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad \left(c_1 = \frac{1}{9}\right) \\ -9c_2\{X\}^{(2)} &= \begin{Bmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{X\}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{Bmatrix} \quad \left(c_2 = \frac{2}{9}\right) \\ 18c_3\{X\}^{(3)} &= \begin{Bmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{X\}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \left(c_3 = \frac{2}{9}\right) \end{aligned} \tag{4.84}$$

Ţinând seama de definiţia vectorilor şi valorilor proprii (4.2) se pot verifica rezultatele obţinute pentru valorile proprii ($\lambda_1 = 3;\ \lambda_2 = 6;\ \lambda_3 = 9$) şi vectorii proprii corespunzători daţi de relaţiile (4.84) :

$$\begin{aligned} [A]\{X\}^{(1)} &= \lambda_1\{X\}^{(1)} \\ [A]\{X\}^{(2)} &= \lambda_2\{X\}^{(2)} \\ [A]\{X\}^{(3)} &= \lambda_3\{X\}^{(3)} \end{aligned} \tag{4.85}$$

4.4. Metoda Leverrier

Această metodă permite calculul valorilor proprii ale unei matrice [A] pe baza dezvoltării polinomului caracteristic $D(\lambda)$ cu ajutorul *formulelor lui Newton pentru sumele puterilor rădăcinilor unei ecuații polinomiale.* Determinarea valorilor proprii constă atât în calculul primelor n puteri ale matricei [A] cât şi a sumelor termenilor aflați pe diagonala principală a acestor matrice.

Determinantul caracteristic al matricei [A] se scrie sub forma polinomului:

$$D(\lambda)=det([A]-\lambda[I]_n)=(-1)^n(\lambda^n+k_1\lambda^{n-1}+k_2\lambda^{n-2}+k_3\lambda^{n-3}+...+k_n) \quad (4.86)$$

Se notează cu s_m suma puterilor de ordinul m ale rădăcinilor polinomului caracteristic (4.86):

$$s_m=\lambda_1^m+\lambda_2^m+...+\lambda_n^m \\ m=1,2,3,...,n \quad (4.87)$$

Formulele lui Newton pentru sumele puterilor de ordinul m ale rădăcinilor în cazul polinomul caracteristic (4.86) se scriu:

$$s_m+k_1s_{m-1}+k_2s_{m-2}+...+k_{m-1}s_1=-k_m \\ m=1,2,3,...,n \quad (4.88)$$

Dacă se cunosc sumele puterilor rădăcinilor de ordinul m ale polinomului caracteristic (4.86), atunci sistemul (4.88) permite determinarea coeficienților $k_1, k_2, ..., k_n$ astfel:

$$\begin{cases}-k_1=s_1\\-2k_2=s_2+k_1s_1\\-3k_3=s_3+k_1s_2+k_2s_1\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\-nk_n=s_n+k_1s_{n-1}+k_2s_{n-1}+...+k_ns_1\end{cases} \quad (4.89)$$

Se poate demonstra că sumele puterilor rădăcinilor de ordinul m ale polinomului caracteristic al unei matrice [A] reprezintă urmele matricilor $[A]^m$:

$$s_m=\lambda_1^m+\lambda_2^m+...+\lambda_n^m=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^{(m)} \quad (4.90)$$

unde $a_{ii}^{(m)}$ sunt termenii de pe diagonala principală a matricei $[A]^m$:

$$[A]^m=\left[a_{ij}^{(m)}\right] \qquad m=2,3,...,n \quad (4.91)$$

matricile $[A]^m$ se determină astfel:

$$[A]^m=[A]^{m-1}[A], \qquad m=2,3,...,n \quad (4.92)$$

Aplicația 4.3

Folosind metoda *Leverrier* să se determine valorile proprii ale matricei [*A*]:

$$[A]=\begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \tag{4.93}$$

Rezolvare

Se determină matricele $[A]^2$ şi $[A]^3$ astfel:

$$[A]^2=\begin{bmatrix} 53 & -26 & 4 \\ -26 & 44 & -22 \\ 4 & -22 & 29 \end{bmatrix}$$
$$[A]^3=\begin{bmatrix} 423 & -270 & 72 \\ -270 & 360 & -198 \\ 72 & -198 & 189 \end{bmatrix} \tag{4.94}$$

Sumele s_m ale puterilor rădăcinilor de ordinul m ($m=1,2,3$) ale polinomului caracteristic $D(\lambda)$ se determină folosind relațiile (4.90) :

$$\begin{cases} s_1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\sum_{i=1}^{3}a_{ii}^{(1)}=18 \\ s_2=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=\sum_{i=1}^{3}a_{ii}^{(2)}=126 \\ s_3=\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3=\sum_{i=1}^{3}a_{ii}^{(3)}=972 \end{cases} \tag{4.95}$$

Coeficienții polinomului caracteristic k_1, k_2 şi k_3 se determină folosind relațiile (4.89)

$$\begin{cases} m_1=-s_1=-18 \\ m_2=-\frac{1}{2}\left(s_2+m_1 s_1\right)=99 \\ m_3=-\frac{1}{3}\left(s_3+m_1 s_2+m_2 s_1\right)=-162 \end{cases} \tag{4.95}$$

Se obține astfel ecuația caracteristică a matricei [*A*]:

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0 \tag{4.96}$$

Rezolvând ecuația (4.4.11) se obțin valorile proprii ale matricei [*A*]:

$$\lambda_1=3; \quad \lambda_2=6; \quad \lambda_3=9. \tag{4.97}$$

4.5. Metoda coeficienților nedeterminați

Metoda *coeficienților nedeterminați* permite calculul valorilor proprii ale unei matrice [*A*] pe baza valorilor polinomului caracteristic $D(\lambda)$ obținut pentru *n* valori particulare ale variabilei λ.

Polinomul caracteristic al unei matrice [*A*] se scrie sub forma:

$$D(\lambda)=det([A]-\lambda[I])=(-1)^n(\lambda^n+k_1\lambda^{n-1}+k_2\lambda^{n-2}+...+k_n) \qquad (4.98)$$

Dacă variabila λ ia următoarele valori: $\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=2,\ ...,\ \lambda_n=n-1$ înlocuind în relația (4.98) se obține sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} k_n=(-1)^n D(0) \\ 1+k_1+k_2+...+k_n=(-1)^n D(1) \\ 2^n+k_1 2^{n-1}+k_2 2^{n-2}+...+k_n=(-1)^n D(2) \\ .... \\ (n-1)^n+k_1(n-1)^{n-1}+k_2(n-1)^{n-2}+...+k_n=(-1)^n D(n-1) \end{cases} \qquad (4.99)$$

Scăzând prima ecuație din celelalte ecuații ale sistemului (4.99) unde care s-au trecut termenii liberi în dreapta, se obține sistemul liniar de ecuații:

$$\begin{cases} k_1+k_2+\ ...\ +k_{n-1}=(-1)^n[D(1)-D(0)]-1 \\ k_1 2^{n-1}+k_2 2^{n-2}+...\ +2k_{n-1}=(-1)^n[D(2)-D(0)]-2^n \\ .... \\ k_1(n-1)^{n-1}+k_2(n-1)^{n-2}+...+k_{n-1}=(-1)^n[D(n-1)-D(0)]-(n-1)^n \end{cases} \qquad (4.100)$$

Sistemul liniar de ecuații (4.100) se scrie matriceal sub forma:

$$[C]_{n-1}\{K\}=\{D\} \qquad (4.101)$$

unde: $$[C]_{n-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 2^{n-1} & 2^{n-2} & ... & 2 \\ . & . & . & . \\ (n-1)^{n-1} & (n-1)^{n-2} & ... & n-1 \end{bmatrix};\quad \{K\}=\begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ ... \\ k_{n-1} \end{Bmatrix}; \qquad (4.102)$$

$$\{D\}=\begin{Bmatrix} (-1)^n[D(1)-D(0)]-1 \\ (-1)^n[D(2)-D(0)]-2^n \\ ... \\ (-1)^n[D(n-1)-D(0)]-(n-1)^n \end{Bmatrix} \qquad (4.103)$$

Se observă că matricea $[C]_{n-1}$ este independentă de determinantul caracteristic (4.98), depinzând numai de ordinul *n* al matricei [*A*] .

Înmulțind ecuația matriceală (4.101) la stânga cu matricea $[C]_{n-1}^{-1}$ se obțin coeficienții polinomului caracteristic: $\{K\}=[C]_{n-1}^{-1}\{D\}$ (4.104)

Elementele matricei coloană $\{D\}$ se calculează cu ajutorul determinanţilor:

$$D(m)=det([A]-m[I])=\begin{vmatrix} a_{11}-m & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-m & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-m \end{vmatrix}, \quad m=0,1,2,\dots,n-1 \tag{4.105}$$

Aplicaţia 4.4

Folosind metoda coeficienţilor nedeterminaţi să se determine valorile proprii ale matricei [A] :

$$[A]=\begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \tag{4.106}$$

Rezolvare

Se calculează determinanţii *D(0), D(1),D(2)* folosind determinanţii (4.105):

$$\begin{aligned} D(0) &= det([A])=162; \\ D(1) &= det([A]-[I])=80; \\ D(2) &= det([A]-2[I])=28. \end{aligned} \tag{4.107}$$

Conform relaţiei (4.102) pentru $n=3$ matricea $[C]_{n-1}$ are forma:

$$[C]_{n-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2^2 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \tag{4.108}$$

Ecuaţia matriceală (4.104) se scrie în acest caz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 81 \\ 126 \end{Bmatrix} \tag{4.109}$$

Rezolvând ecuaţia (4.109) şi ţinînd seama că: $k_3= - D(0)$ rezultă:

$$p_1=-18; \; p_2=99; \; p_3=-162 \tag{4.110}$$

Se obţine ecuaţia caracteristică:

$$\lambda^3 -18\,\lambda^2 + 99\lambda -162=0 \tag{4.111}$$

care are ca soluţii valorile proprii ale matricei $[A]$:

$$\lambda_1=3; \qquad \lambda_2=6; \qquad \lambda_3=9. \tag{4.112}$$

4.6. Metoda interpolării cu diferențe finite a lui Newton

Metoda interpolării cu diferențe finite a lui *Newton* permite determinarea polinomului caracteristic *D(λ)* al unei matrice [*A*] cu ajutorul *primei formule de interpolare a lui Newton cu ajutorul diferențelor finite progresive.* Modul de calcul al diferențelor finite progresive este prezentat în capitolul 5.

Determinantul caracteristic al matricei [*A*] se scrie:

$$D(\lambda) = det([A] - \lambda[I]) \tag{4.113}$$

Se calculează valorile determinantului caracteristic al matricei [*A*] (4.113) pentru următoarele valori ale variabilei λ :

$$\begin{aligned} &\lambda_0 = 0,\ \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2,\ \ldots,\ \lambda_n = n \\ &D(0) = det[A])\quad D(1) = det([A] - [I]), \\ &D(2) = det([A] - 2[I]).\ .\ .\quad D(n) = det([A] - n[I]) \end{aligned} \tag{4.114}$$

Formula de interpolare a lui *Newton cu ajutorul diferențelor finite progresive* pentru polinomul caracteristic *D(λ)* este:

$$D(\lambda) = D(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-i+1)}{i!} \Delta^i D(0) \tag{4.115}$$

Coeficienții diferențelor finite ai sumei (4.115) se pot scrie sub forma:

$$\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-i+1)}{i!} = \sum_{m=1}^{i} c_{mi} \lambda^m \tag{4.116}$$

Înlocuind expresiile coeficienților (4.116) în relația (4.115) se obține *formula lui Markov a polinomului caracteristic cu ajutorul diferențelor finite progresive:*

$$D(\lambda) = D(0) + \sum_{m=1}^{n} \lambda^m \sum_{i=m}^{n} c_{mi} \Delta^i D(0) \tag{4.116}$$

Coeficienții c_{mi} se determină pentru *i=1, 2, 3, 4* prin identificare în relația (4.116) :

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda}{1!} = c_{11}\lambda \\ \dfrac{\lambda(\lambda-1)}{2!} = c_{12}\lambda + c_{22}\lambda^2 \\ \dfrac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{3!} = c_{13}\lambda + c_{23}\lambda^2 + c_{33}\lambda^3 \\ \dfrac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{4!} = c_{14}\lambda + c_{24}\lambda^2 + c_{34}\lambda^3 + c_{44}\lambda^4 \\ \dfrac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-3)}{5!} = c_{15}\lambda + c_{25}\lambda^2 + c_{35}\lambda^3 + c_{45}\lambda^4 + c_{55}\lambda^5 \end{cases} \tag{4.117}$$

Rezultă următoarele valori ale coeficienților c_{mi} şi ale polinoamelor:

$$\begin{cases} c_{11} = 1 \\ c_{12} = -1/2, \quad c_{22} = 1/2 \\ c_{13} = 1/3, \; c_{23} = -1/2, \; c_{33} = 1/6 \\ c_{14} = -1/4, \; c_{24} = 11/24, \; c_{34} = -1/4, \; c_{44} = 1/24 \\ c_{15} = 3/20, \; c_{25} = -39/120, \; c_{35} = 29/120, \; c_{45} = -3/40, \; c_{55} = 1/120 \end{cases} \tag{4.118}$$

- Polinomul caractertistic al unei matrice $[A]_{3\times3}$ folosind diferenţele progresive de ordinul *1, 2* şi *3* se scrie ţinând seama de (4.116) astfel:

$$D(\lambda) = D(0) + \left[c_{11}\Delta D(0) + c_{12}\Delta^2 D(0) + c_{13}\Delta^3 D(0)\right]\lambda + \\ + \left[c_{22}\Delta^2 D(0) + c_{23}\Delta^3 D(0)\right]\lambda^2 + \left[c_{33}\Delta^3 D(0)\right]\lambda^3$$

$$D(\lambda) = D(0) + \left(\Delta D - \frac{\Delta^2 D}{2} + \frac{\Delta^3 D}{3}\right)\lambda + \left(\frac{\Delta^2 D}{2} - \frac{\Delta^3 D}{2}\right)\lambda^2 + \frac{\Delta^3 D}{6}\lambda^3 \tag{4.119}$$

- Polinomul caractertistic al unei matrice $[A]_{4\times4}$ folosind diferenţele progresive de ordinul *1, 2, 3* şi *4* se scrie astfel:

$$D(\lambda) = D(0) + \left[c_{11}\Delta D(0) + c_{12}\Delta^2 D(0) + c_{13}\Delta^3 D(0) + c_{14}\Delta^4 D(0)\right]\lambda + \\ + \left[c_{22}\Delta^2 D(0) + c_{23}\Delta^3 D(0) + c_{24}\Delta^4 D(0)\right]\lambda^2 + \\ + \left[c_{33}\Delta^3 D(0) + c_{34}\Delta^4 D(0)\right]\lambda^3 + \left[c_{44}\Delta^4 D(0)\right]\lambda^4$$

$$D(\lambda) = D(0) + \left(\Delta D - \frac{\Delta^2 D}{2} + \frac{\Delta^3 D}{3} - \frac{\Delta^4 D}{4}\right)\lambda + \\ + \left(\frac{\Delta^2 D}{2} - \frac{\Delta^3 D}{2} + \frac{11\cdot\Delta^4 D}{24}\right)\lambda^2 + \left(\frac{\Delta^3 D}{6} - \frac{\Delta^4 D}{4}\right)\lambda^3 + \frac{\Delta^4 D}{24}\lambda^4 \tag{4.120}$$

- Polinomul caractertistic al unei matrice $[A]_{5\times5}$ folosind diferenţele progresive de ordinul *1, 2, 3, 4* şi *5* se scrie astfel:

$$D(\lambda) = D(0) + \left(\Delta D - \frac{\Delta^2 D}{2} + \frac{\Delta^3 D}{3} - \frac{\Delta^4 D}{4} + \frac{3\Delta^5 D}{20}\right)\lambda + \\ + \left(\frac{\Delta^2 D}{2} - \frac{\Delta^3 D}{2} + \frac{11\cdot\Delta^4 D}{24} - \frac{39\Delta^5 D}{120}\right)\lambda^2 \\ + \left(\frac{\Delta^3 D}{6} - \frac{\Delta^4 D}{4} + \frac{29\Delta^5 D}{120}\right)\lambda^3 + \left(\frac{\Delta^4 D}{24} - \frac{3\Delta^5 D}{40}\right)\lambda^4 + \frac{\Delta^5 D}{120}\lambda^5 \tag{4.121}$$

Folosirea metodei interpolării lui Newton cu diferenţe finite progresive pentru determinarea polinomului caracteristic şi a valorilor proprii ai unei matrice [*A*] pare complicată datorită faptului că necesită calculul a (*n-1*) determinanţi conform relaţiei (4.114), însă algoritmul de calcul este simplu şi poate fi uşor programat.

Aplicația 4.5

Folosind metoda interpolării lui Newton cu diferențe finite să se determine determinantul caracteristic al matricei [*A*] :

$$[A]=\begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \tag{4.122}$$

Rezolvare

Se calculează determinanții *D(0), D(1),D(2)* și *D(3)*:

$$\begin{aligned} D(0) &= det\left([A]\right)=162; \\ D(1) &= det\left([A]-[I]\right)=80; \\ D(2) &= det\left([A]-2[I]\right)=28; \\ D(3) &= det\left([A]-3[I]\right)=0. \end{aligned} \tag{4.123}$$

Se calculează primele trei diferențele finite progresive conform relațiilor:

$$\begin{aligned} &\Delta D(0)=D(1)-D(0); \;\; \Delta D(1)=D(2)-D(1); \;\; \Delta D(2)=D(3)-D(2) \\ &\Delta^2 D(0)=\Delta D(1)-\Delta D(0); \quad \Delta^2 D(1)=\Delta D(2)-\Delta D(1) \\ &\Delta^3 D(0)=\Delta^2 D(1)-\Delta^2 D(0) \end{aligned} \tag{4.124}$$

Valorile numerice obținute sunt date în tabelul 4.1

Tabelul 4.1

λ	$D(\lambda)$	$\Delta D(\lambda)$	$\Delta^2 D(\lambda)$	$\Delta^3 D(\lambda)$
0	162	82	-30	6
1	80	52	-24	
2	28	28		
3	0			

Folosind relația (4.119) se obține polinomul caracteristic al matricei [*A*] folosind diferențele progresive de ordinul *1, 2* și *3*:

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= -162+\left(82+\frac{1}{2}\cdot 30+\frac{1}{3}\cdot 6\right)\lambda+\left(-\frac{1}{2}\cdot 30-\frac{1}{2}\cdot 6\right)\lambda^2+\frac{1}{6}\cdot 6\lambda^3 \\ D(\lambda) &= -162+99\lambda-18\lambda^2+\lambda^3 \end{aligned} \tag{4.125}$$

Observație: Se poate verifica faptul că diferențele regresive având ordinul mai mare decât trei sunt nule, deci înlocuind în formula de interpolare (4.115) rezultă că polinomul de interpolare (4.125) *este unic*.

4.7. Metoda iteraţiei matriceale

Metoda iteraţiei matriceale permite calculul valorii proprii maxime şi a vectorului propriu corespunzărtor acestei valori.

Polinomul caracteristic al matricei pătratice $[A]$ se scrie:

$$D(\lambda) = det([A] - \lambda[I]) \tag{4.126}$$

Se ordonează valorile proprii ale matricei $[A]$ sau rădăcinile ecuaţiei caracteristice $D(\lambda) = 0$ în ordinea valorilor absolute astfel:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > ... > |\lambda_n| \tag{4.127}$$

Conform *teoremei lui Perron* acest lucru este posibil, dacă toate elementele matricei $[A]$ sunt pozitive.

Se consideră un vector arbitrar $\{Y\}^{(0)}$ care se scrie ca o combinaţie liniară a vectorilor proprii $\{X\}_j$ corespunzători matricei $[A]$:

$$\{Y\}^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} c_j \{X\}_j \tag{4.128}$$

Înmulţind la stânga relaţia (4.128) cu matricea $[A]$ se obţine vectorul:

$$\{Y\}^{(1)} = [A]\{Y\}^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} c_j [A]\{X\}_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j \{X\}_j \tag{4.129}$$

Repetând algoritmul, se obţin succesiv vectorii:

$$\begin{aligned}
\{Y\}^{(2)} &= [A]\{Y\}^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j [A]\{X\}_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^2 \{X\}_j \\
\{Y\}^{(3)} &= [A]\{Y\}^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^2 [A]\{X\}_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^3 \{X\}_j \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\{Y\}^{(n)} &= [A]\{Y\}^{(n-1)} = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^{n-1} [A]\{X\}_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^n \{X\}_j
\end{aligned} \tag{4.130}$$

Se consideră spaţiul vectorial n-dimensional E_n în care se consideră o bază de vectori independenţi $\{e\}_i$ $i = 1,2,3,...,n$. Vectorii proprii $\{X\}_i$ ai matricei $[A]$ se pot exprima în funcţie de vectorii bazei $\{e\}_i$ sub forma:

$$\{X\}_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \{e\}_i \tag{4.131}$$

Ţinând seama de (4.131) vectorul $\{Y\}^{(m)}$ se scrie:

$$\{Y\}^{(m)} = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^m \{X\}_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^m \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \{e\}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^m x_{ij} \right) \{e\}_i \tag{4.132}$$

sau: $$\{Y\}^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} y_i^{(m)} \{e\}_i \tag{4.133}$$

unde s-a notat cu: $$y_i^{(m)} = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^m x_{ij} \tag{4.134}$$

Valoarea $y_i^{(m)}$ reprezintă coordonata i a vectorului $\{Y\}^{(m)}$ în spațiul vectorial vectorial n-dimensional E_n. În mod analog se poate exprima coordonata i a vectorului $\{Y\}^{(m+1)}$ în spațiul vectorial *n-dimensional* E_n:

$$y_i^{(m+1)} = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^{m+1} x_{ij} \tag{4.135}$$

Împărțind cele două relații obținute mai sus, (4.135) la (4.134), se obține:

$$\frac{y_i^{(m+1)}}{y_i^{(m)}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^{m+1} x_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^{m} x_{ij}}$$
$$\frac{y_i^{(m+1)}}{y_i^{(m)}} = \lambda_1 \frac{1 + \frac{c_2 x_{i2}}{c_1 x_{i1}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{m+1} + \frac{c_3 x_{i3}}{c_1 x_{i1}}\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{m+1} + \ldots + \frac{c_n x_{in}}{c_1 x_{i1}}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{m+1}}{1 + \frac{c_2 x_{i2}}{c_1 x_{i1}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{m} + \frac{c_3 x_{i3}}{c_1 x_{i1}}\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{m} + \ldots + \frac{c_n x_{in}}{c_1 x_{i1}}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{m}} \tag{4.136}$$

Ținând seama ordinea valorilor valorilor proprii (4.127), toate parantezele din relația (4.136) sunt subunitare şi se neglijează atunci când numărul m (de iterații) este suficient de mare:

$$\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^m \approx 0; \quad \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^{m+1} \approx 0 \tag{4.137}$$

Cu o anumită eroare de calcul de iterație, rezultă valoarea proprie cea mai mare λ_1 ca raport al coordonatei y_i corespunzătoare iterațiilor $m+1$ şi m:

$$\lambda_1 = \frac{y_i^{(m+1)}}{y_i^{(m)}} \tag{4.138}$$

Pentru a detremina vectorul propriu $\{X\}_1$ se foloseşte relația (4.129) :

$$\{Y\}^{(m)} = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^m \{X\}_j = c_1 \lambda_1^m \{X\}_1 + c_2 \lambda_2^m \{X\}_2 + \ldots + c_n \lambda_n^m \{X\}_n$$
$$\{Y\}^{(m)} = c_1 \lambda_1^m \left(\{X\}_1 + \frac{c_2}{c_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^m \{X\}_1 + \ldots + \frac{c_n}{c_1}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^m \{X\}_n \right) \tag{4.139}$$

Ținând seama de aceeaşi aproximare (4.137) relația (4.139) devine:

$$\{Y\}^{(m)} \cong c_1 \lambda_1^m \{X\}_1 \tag{4.140}$$

Vectorul propriu $\{X\}_1$ al matricei $[A]$ corespunzător primei valori proprii λ_1 este egal cu vectorul $\{Y\}^{(m)}$ (obținut după ierația *m*) multiplicat cu o constantă $c_1 \lambda_1^m$. Întrucât constanta c_1 poate avea orice valoare, se poate alege o valoare astfel încât să se obțină :

- pentru primul element al vectorului $\{X\}_1$ valoarea $x_1=1$ atunci:

$$c_1 = \frac{y_1^{(m)}}{\lambda_1^m} \tag{4.141}$$

- valori normalizate pentru elementele vectorului $\{X\}_1$:

$$c_1 = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i^{(m)}\right)^2}}{\lambda_1^m} \tag{4.142}$$

Aplicaţia 4.6

Se consideră sistemul format din trei corpuri de mase : $m_1=m$, $m_2=2m$ şi $m_3=m$ legate cu mediul fix şi între ele cu patru arcuri având aceeaşi rigiditate k , conform figurii 4.1. Să se determine valorile pulsaţiei proprii minime (fudamentale) şi maxime, precum şi modurile proprii de vibraţie corespunzătoare, folosind metoda iteraţiei matriceale.

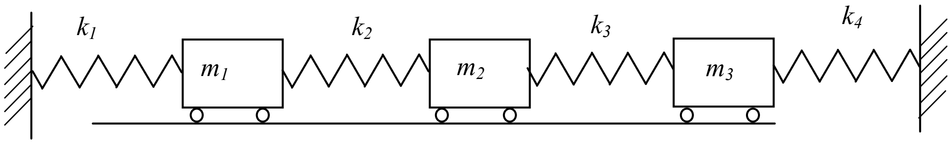


Fig.4.1

Rezolvare

Se scriu ecuaţiile diferenţiale ale mişcării folosind ecuaţiile lui Lagrange. Pentru aceasta se exprimă energia cinetică a sistemului format din cele trei corpuri şi energia potenţială a arcurilor în funcţie de coordonatele generalizate q_1, q_2 şi q_3 , care reprezintă deplasările celor trei corpuri pe direcţie orizontală (fig. 4.2):

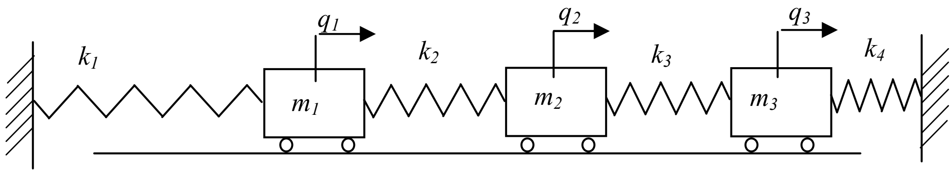


Fig.4.2

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\left(m\dot{q}_1^2 + 2m\dot{q}_2^2 + m\dot{q}_3^2\right) \\ V &= \frac{1}{2}\left(kq_1^2 + k(q_1 - q_2)^2 + k(q_2 - q_3)^2 + kq_3{}^2\right) \end{aligned} \tag{4.143}$$

Ecuaţiile lui Lagrange pentru cazul unui sistem conservativ de forţe sunt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}_k}\right) - \frac{dL}{dq_k} = 0; \quad L = E - V, \quad k=1,2,3 \tag{4.144}$$

Ţinând seama de expresiile energiilor E şi V (4.143) se scriu ecuaţiile lui Lagrange pentru fiecare din cele trei coordonate generalizate şi se obţine sistemul de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul doi:

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 + 2kq_1 - kq_2 = 0 \\ m\ddot{q}_2 - kq_1 + 2kq_2 - kq_3 = 0 \\ m\ddot{q}_3 - kq_2 + 2kq_3 = 0 \end{cases} \tag{4.145}$$

Sistemul de ecuații (4.145) se scrie matriceal sub forma:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.146}$$

sau matriceal:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \tag{4.147}$$

Soluția acestei ecuații diferențiale este o soluție armonică de forma:

$$\{q\} = \{a\} cos\, pt \tag{4.148}$$

Înlocuind în ecuația (4.7.20) se obține ecuația matriceală:

$$\left(-p^2[M] + [K]\right)\{a\} = \{0\} \tag{4.149}$$

care este echivalentă cu:

$$[K]\{a\} = p^2[M]\{a\} \tag{4.150}$$

a. determinarea lui p_{max}

Înmulțind la stânga relația (4.150) cu matricea $[M]^{-1}$ se obține ecuația de valori proprii:

$$[M]^{-1}[K]\{a\} = p^2[M]^{-1}[M]\{a\} \quad \Leftrightarrow \quad [M]^{-1}[K]\{a\} = p^2\{a\} \tag{4.151}$$

Folosind metoda iterației matriceale se determină valoarea proprie cea mai mare $\lambda_1 = p_3^2$ a matricei $[A] = [M]^{-1}[K]$ adică valoarea cea mai mare a pulsației proprii $p_{max}=p_3$ a sistemului vibrator.

Din relația matriceală (4.146) se obțin expresiile matricelor $[M]^{-1}$ şi $[K]^{-1}$:

$$[M] = m\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [M]^{-1} = \frac{1}{m}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.152}$$

$$[K] = k\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow [K]^{-1} = \frac{1}{k}\begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{bmatrix} \tag{4.153}$$

Rezultă expresia matricei $[A]$:

$$[A] = [M]^{-1}[K] = \frac{k}{m}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{4.154}$$

Se foloseşte pentru început vectorul:

$$\{Y\}^{(0)} = \{1 \quad 0 \quad 1\}^t \tag{4.155}$$

Ceilalți vectori se calculează prin iterație cu ajutorul relației:

$$\{Y\}^{(m+1)} = [A]\{Y\}^{(m)} \qquad m=0,1,2,\ \dots,\ n\text{-}1 \tag{4.156}$$

Se obține succesiv:

$$\{Y\}^{(1)} = \frac{k}{m}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{k}{m}\begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$\{Y\}^{(2)} = \left(\frac{k}{m}\right)^2\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix} = \left(\frac{k}{m}\right)^2\begin{Bmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

$$\{Y\}^{(3)} = \left(\frac{k}{m}\right)^3\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{Bmatrix} = \left(\frac{k}{m}\right)^3\begin{Bmatrix} 13 \\ -8 \\ 13 \end{Bmatrix} \tag{4.157}$$

$$\{Y\}^{(4)} = \left(\frac{k}{m}\right)^3\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{Bmatrix} = \left(\frac{k}{m}\right)^3\begin{Bmatrix} 13 \\ -8 \\ 13 \end{Bmatrix}$$

$$\{Y\}^{(5)} = \left(\frac{k}{m}\right)^4\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 13 \\ -8 \\ 13 \end{Bmatrix} = \left(\frac{k}{m}\right)^4\begin{Bmatrix} 34 \\ -21 \\ 34 \end{Bmatrix}$$

$$\{Y\}^{(6)} = \left(\frac{k}{m}\right)^5\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 34 \\ -21 \\ 34 \end{Bmatrix} = \left(\frac{k}{m}\right)^5\begin{Bmatrix} 89 \\ -55 \\ 89 \end{Bmatrix}$$

$$\{Y\}^{(7)} = \left(\frac{k}{m}\right)^6\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 89 \\ -55 \\ 89 \end{Bmatrix} = \left(\frac{k}{m}\right)^6\begin{Bmatrix} 233 \\ -144 \\ 233 \end{Bmatrix}$$

Rezultatele obținute după iterația a șaptea se pot considera suficient de precise deoarece raportul elementelor corespunzătoare vectorilor $\{Y\}^{(7)}$ şi $\{Y\}^{(6)}$ diferă la a patra zecimală:

$$\frac{y_1^{(7)}}{y_1^{(6)}} = \frac{y_2^{(7)}}{y_2^{(6)}} = \frac{y_3^{(7)}}{y_3^{(6)}} = 2{,}618\left(\frac{k}{m}\right) \tag{4.158}$$

Cea mai mare valoare proprie a matricei $[A]$ şi valoarea pulsației prorii corespunzătoare modului de vibrație de frecvență maximă sunt:

$$\lambda_1 = 2{,}618\frac{k}{m}$$
$$p_3 = \sqrt{2{,}618\frac{k}{m}} = 1{,}618\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{4.159}$$

Vectorul propriu corespunzător modului de vibraţie de frecvenţă maximă se obţine normalizând elementele vectorului $\{Y\}^{(7)}$:

$$\{X\}_3 = \frac{1}{359{,}6}\begin{Bmatrix} 233 \\ -144 \\ 233 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}648 \\ -0{,}4 \\ 0{,}648 \end{Bmatrix} \tag{4.160}$$

b. determinarea lui p_{min}

Înmulţind la stânga relaţia (4.150) cu matricea $[K]^{-1}$ se obţine ecuaţia matriceală de valori proprii:

$$[K]^{-1}[K]\{a\} = p^2[K]^{-1}[M]\{a\} \quad \Leftrightarrow \quad [K]^{-1}[M]\{a\} = \frac{1}{p^2}\{a\} \tag{4.160}$$

Folosind aceeaşi metodă a iteraţiei matriceale se determină valoarea proprie cea mai mare $\lambda_1^* = 1/p_1^2$ a matricei $[B]=[K]^{-1}[M]$ adică valoarea cea mai mică a pulsaţiei proprii (pulsaţia fundamentală $p_{min} = p_1$) a sistemului vibrator.

Matricea $[B]$ are expresia

$$[B] = [K]^{-1}[M] = \frac{m}{k}\begin{bmatrix} 3/4 & 1 & 1/4 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ 1/4 & 1 & 3/4 \end{bmatrix} \tag{4.161}$$

Se foloseşte pentru început vectorul oarecare:

$$\{Y\}^{(0)} = \{1 \quad 1 \quad 1\}^t \tag{4.162}$$

şi se calculează ceilalţi vectori cu ajutorul formulei de iteraţie (4.7.27) şi se obţine:

$$\{Y\}^{(1)} = \frac{m}{k}\begin{bmatrix} 3/4 & 1 & 1/4 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ 1/4 & 1 & 3/4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{m}{k}\begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$\{Y\}^{(2)} = \left(\frac{m}{k}\right)^2 \begin{bmatrix} 3/4 & 1 & 1/4 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ 1/4 & 1 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix} = \left(\frac{m}{k}\right)^2 \begin{Bmatrix} 5 \\ 8 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

$$\{Y\}^{(3)} = \left(\frac{m}{k}\right)^3 \begin{bmatrix} 3/4 & 1 & 1/4 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ 1/4 & 1 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 5 \\ 8 \\ 5 \end{Bmatrix} = \left(\frac{m}{k}\right)^3 \begin{Bmatrix} 13 \\ 21 \\ 13 \end{Bmatrix} \qquad (4.163)$$

$$\{Y\}^{(4)} = \left(\frac{m}{k}\right)^3 \begin{bmatrix} 3/4 & 1 & 1/4 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ 1/4 & 1 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 13 \\ 21 \\ 13 \end{Bmatrix} = \left(\frac{m}{k}\right)^3 \begin{Bmatrix} 34 \\ 55 \\ 34 \end{Bmatrix}$$

$$\{Y\}^{(5)} = \left(\frac{m}{k}\right)^4 \begin{bmatrix} 3/4 & 1 & 1/4 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ 1/4 & 1 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 34 \\ 55 \\ 34 \end{Bmatrix} = \left(\frac{m}{k}\right)^4 \begin{Bmatrix} 89 \\ 144 \\ 89 \end{Bmatrix}$$

$$\{Y\}^{(6)} = \left(\frac{m}{k}\right)^5 \begin{bmatrix} 3/4 & 1 & 1/4 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ 1/4 & 1 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 89 \\ 144 \\ 89 \end{Bmatrix} = \left(\frac{m}{k}\right)^5 \begin{Bmatrix} 233 \\ 377 \\ 233 \end{Bmatrix} \qquad (4.163)$$

Rezultatele obținute la iterația a şasea se pot considera suficient de precise întrucât raportul elementelor corespunzătoare vectorilor $\{Y\}^{(6)}$ şi $\{Y\}^{(5)}$ diferă la a patra zecimală:

$$\frac{y_1^{(6)}}{y_1^{(5)}} = \frac{y_2^{(6)}}{y_2^{(5)}} = \frac{y_3^{(6)}}{y_3^{(5)}} = 2{,}618\frac{m}{k} \qquad (4.164)$$

Cea mai mare valoare proprie a matricei $[B]$ şi valoarea pulsației prorii corespunzătoare modului de vibrație de frecvență minimă sunt:

$$\lambda_1^* = 2{,}618\frac{m}{k}$$

$$\frac{1}{p_1} = \sqrt{2{,}618\frac{m}{k}} \Rightarrow p_1 = 0{,}618\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (4.165)$$

Vectorul propriu corespunzător modului fundamental de vibrație se obține normalizând elementele vectorului $\{Y\}^{(6)}$:

$$\{X\}_1 = \frac{1}{500{,}7} \begin{Bmatrix} 233 \\ 377 \\ 233 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}465 \\ 0{,}753 \\ 0{,}465 \end{Bmatrix} \qquad (4.166)$$

5. METODE NUMERICE CU DIFERENȚE FINITE

Metodele numerice de interoplare, derivare, integrare sau de rezolvare a ecuațiilor diferențiale cu diferențe finite, folosesc *valorile discrete ale funcției*, adică valorile într-un număr finit de puncte ale domeniului de definiție, numite *noduri ale rețelei*. Rezolvarea unor astfel de probleme pe baza unui set de valori discrete ale funcțiilor continue care nu necesită cunoaşterea analitică a funcției, utilizează trei tipuri de diferențe finite: *progresive* (sau la dreapta), *regresive* (sau la stânga) şi *centrale*. În acest capitol sunt prezentate definițiile şi proprietățile celor trei tipuri de diferențe finite şi trei aplicații privind calculul derivatelor unei funcții cu ajutorul diferențelor finite.

5.1. Diferențe progresive

Se consideră o funcție continuă de n ori derivabilă $f : [a, b] \rightarrow R$ şi un număr n de puncte din intervalul de definiție, numite *noduri ale rețelei,* egal depărtate între ele şi situate la distanța h, notate cu: $x_0=a$, x_1, . . . , x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, . . . , $x_n=b$, Valorile funcției în nodurile rețelei sunt notate cu: y_0, y_1, ... y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, ... y_n. Se definesc *diferențele progresive* ale funcției *f(x)* în nodurile rețelei cu ajutorul relațiilor:

$$\begin{aligned}
&\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \\
&\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i \\
&\Delta^3 y_i = \Delta\left(\Delta^2 y_i\right) = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i \qquad (5.1)\\
&\Delta^4 y_i = \Delta\left(\Delta^3 y_i\right) = y_{i+4} - 4y_{i+3} + 6y_{i+2} - 4y_{i+1} + y_i \\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
&\Delta^n y_i = \Delta\left(\Delta^{n-1} y_i\right) = y_{i+n} - C_n^1 y_{i+n-1} + C_n^2 y_{i+n-2} + \ldots.(-1)^{n-1} C_n^{n-1} y_{i+1} + (-1)^n y_i
\end{aligned}$$

Dezvoltând în serie Taylor funcția *f(x) în dreapta* punctului x se obține:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + \ldots \qquad (5.2)$$

Operatorii diferențiali D D^2, D^3, ... definiți astfel:

$$Df = f'(x); \quad D^2 f = f''(x); \quad D^3 f = f'''(x); \quad \ldots. \qquad (5.3)$$

satisfac legile algebrei privind distributivitatea, comutativitatea, înmulţirea cu o constantă şi asociativitate în raport cu operaţiile de adunare şi înmulţire, adică au proprietăţile:

$$\begin{aligned} &D(f+g)=Df+Dg \\ &Df+Dg=Dg+Df \\ &D(cf)=cDf; \\ &D^m\left(D^n f\right)=D^{m+n} f \end{aligned} \tag{5.4}$$

Dezvoltarea în serie Taylor a funcţiei *f(x)* (5.2) se mai poate scrie simbolic, folosind operatorii diferenţiali *D, D^2, ...* definiţi mai sus, astfel:

$$f(x+h)=\left(1+hD+\frac{h^2}{2}D^2+\frac{h^3}{6}D^3+\ldots\right)f(x) \tag{5.5}$$

Ţinând seama de dezvoltarea în serie a funcţiei exponenţiale e^x:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\ldots \tag{5.6}$$

prin analogie, relaţia (5.5) se poate scrie simbolic astfel:

$$f(x+h)=e^{hD}f(x) \tag{5.7}$$

Notând $y_i=f(x)$; $y_{i+1}=f(x+h)$ relaţia (5.7) se mai scrie simbolic sub forma:

$$y_{i+1}=e^{hD}y_i \tag{5.8}$$

Expresiile diferenţelor progresive Δ, Δ^2, Δ^3,... în funcţie de operatorii diferenţiali *D, D^2, D^3, ...* se obţin cu ajutorul calculului simbolic. Astfel conform relaţiilor (5.1) şi (5.8) prima diferenţă progresivă se scrie:

$$\Delta y_i=y_{i+1}-y_i=\left(e^{hD}-1\right)y_i \tag{5.9}$$

Prin identificare rezultă relaţia simbolică între operatorii Δ şi D:

$$\Delta=e^{hD}-1 \tag{5.10}$$

Ţinând seama de dezvoltarea în serie (5.6) a funcţiei exponenţiale în scriere simbolică:

$$e^{hD}=1+hD+\frac{h^3D^2}{2}+\frac{h^3D^3}{6}+\frac{h^4D^4}{24}+\frac{h^5D^5}{120}+\frac{h^6D^6}{720}+\frac{h^7D^7}{5040}+\ldots \tag{5.11}$$

şi înlocuind în relaţia (5.10) rezultă *expresia simbolică a primei diferenţe progresive* Δ în funcţie de operatorii diferenţiali ai funcţiei *f(x)*:

$$\Delta=hD+\frac{1}{2}h^2D^2+\frac{1}{6}h^3D^3+\frac{1}{24}h^4D^4+\frac{1}{120}h^5D^5+\frac{1}{720}h^6D^6+\ldots \tag{5.12}$$

Diferenţele finite de ordin superior (Δ^2, Δ^3, Δ^4, Δ^5, Δ^6 ...) se obţin prin ridicarea simbolică la putere a expresiei (5.10). Dacă se reţin primele şapte derivate ale funcţiei *f(x)* din dezvoltarea (5.11) se obţine:

$$\Delta^2 = \left(e^{hD} - 1\right)^2 \cong h^2D^2 + h^3D^3 + \frac{7}{12}h^4D^4 + \frac{1}{4}h^5D^5 + \frac{31}{320}h^6D^6 + \frac{1}{40}h^7D^7 \quad (5.13)$$

$$\Delta^3 = \left(e^{hD} - 1\right)^3 \cong h^3D^3 + \frac{3}{2}h^4D^4 + \frac{5}{4}h^5D^5 + \frac{3}{4}h^6D^6 + \frac{43}{120}h^7D^7 \quad (5.14)$$

$$\Delta^4 = \left(e^{hD} - 1\right)^4 \cong h^4D^4 + 2h^5D^5 + \frac{13}{6}h^6D^6 + \frac{5}{3}h^7D^7 \quad (5.15)$$

$$\Delta^5 = \left(e^{hD} - 1\right)^5 \cong h^5D^5 + \frac{5}{2}h^6D^6 + \frac{10}{3}h^7D^7 \quad (5.16)$$

$$\Delta^6 = \left(e^{hD} - 1\right)^6 \cong h^6D^6 + 3h^7D^7 \quad (5.17)$$

Aplicația 5.1

Să se determine primele șase diferențe progresive ale funcției $f(x)=x^2-lnx$ definită pe intervalul [1; 2,6], dacă se cunosc valorile ei în 17 puncte echidistante situate la distanța h=0,1. Să se verifice rezultatele obținute folosind relațiile (5.12) ... (5.17) cu primele șase derivate ale funcției $f(x)$.

Rezolvare

Valorile diferențelor finite progresive se calculează cu relațiile (5.1) și sunt date în tabelul 5.1:

Tabelul 5.1

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
0	1	1.000000	0.114690	0.028299	-0.001330	0.000296	-0.000082	0.000026
1	1.1	1.114690	0.142989	0.026969	-0.001034	0.000214	-0.000055	0.000017
2	1.2	1.257678	0.169957	0.025935	-0.000820	0.000159	-0.000039	0.000011
3	1.3	1.427636	0.195892	0.025115	-0.000661	0.000120	-0.000028	0.000007
4	1.4	1.623528	0.221007	0.024454	-0.000540	0.000093	-0.000020	0.000005
5	1.5	1.844535	0.245461	0.023914	-0.000448	0.000073	-0.000015	0.000004
6	1.6	2.089996	0.269375	0.023466	-0.000375	0.000058	-0.000011	0.000003
7	1.7	2.359372	0.292842	0.023091	-0.000317	0.000046	-0.000009	0.000002
8	1.8	2.652213	0.315933	0.022774	-0.000271	0.000038	-0.000007	0.000001
9	1.9	2.968146	0.338707	0.022503	-0.000233	0.000031	-0.000005	0.000001
10	2	3.306853	0.361210	0.022270	-0.000202	0.000026	-0.000004	0.000001
11	2.1	3.668063	0.383480	0.022068	-0.000176	0.000022	-0.000003	
12	2.2	5.1.051543	0.405548	0.021892	-0.000155	0.000018		
13	2.3	5.1.457091	0.427440	0.021738	-0.000136			
14	2.4	5.1.884531	0.449178	0.021601				
15	2.5	5.333709	0.470779					
16	2.6	5.804489						

Expresiile derivatelor funcției $f(x) = x^2 - ln\,x$ sunt:

$$f'(x)=2x-\frac{1}{x};\quad f''(x)=2+\frac{1}{x^2};\quad f'''(x)=-\frac{2}{x^3};$$
$$f^{(4)}(x)=\frac{6}{x^4};\quad f^{(5)}(x)=-\frac{24}{x^5};\quad f^{(6)}(x)=\frac{120}{x^6} \tag{5.18}$$

Folosind formulele de calcul ale diferențelor finite (5.12) ... (5.17) şi reținând primele şase derivare se obțin valorile din tabelul 5.2.

Tabelul 5.2

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	1	1.000000	0.114692	0.028350	-0.001100	0.000600
1	1.1	1.114690	0.142990	0.027001	-0.000888	0.000410
2	1.2	1.257678	0.169958	0.025956	-0.000723	0.000289
3	1.3	1.427636	0.195893	0.025129	-0.000595	0.000210
4	1.4	1.623528	0.221007	0.024464	-0.000495	0.000156
5	1.5	1.844535	0.245462	0.023921	-0.000415	0.000119
6	1.6	2.089996	0.269376	0.023471	-0.000351	0.000092
7	1.7	2.359372	0.292842	0.023095	-0.000299	0.000072
8	1.8	2.652213	0.315933	0.022777	-0.000257	0.000057
9	1.9	2.968146	0.338707	0.022505	-0.000223	0.000046
10	2	3.306853	0.36121	0.022272	-0.000194	0.000038
11	2.1	3.668063	0.38348	0.02207	-0.000170	0.000031
12	2.2	5.1.051543	0.405548	0.021893	-0.000149	0.000026
13	2.3	5.1.457091	0.42744	0.021738	-0.000132	
14	2.4	5.1.884531	0.449178	0.021602		
15	2.5	5.333709	0.470779			
16	2.6	5.804489				

Din analiza rezultatelor obținute prin cele două metode se observă o bună apropiere a rezultatelor pentru primele trei diferențe finite. Pentru diferențele finite de ordin superior se constată erori de calcul mai mari datorită numărului redus de termeni ai aproximării şi a erorilor care se cumulează la calculul diferențelor finite.

5.2. Diferențe regresive

Se consideră o funcție continuă de n ori derivabilă $f: [a, b] \to R$ şi un număr n de puncte din intervalul de definiție egal depărtate între ele şi situate la distanța h, notate cu: $x_0=a$, x_1, . . . , x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, . . . , $x_n=b$, Valorile funcției în nodurile rețelei sunt notate cu: $y_0, y_1, \dots y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, \dots y_n$.

Se definesc *diferențele regresive* (sau *la stânga*) ale funcției *f(x)* în nodurile rețelei astfel:

- $\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$
- $\nabla^2 y_i = \nabla(\nabla y_i) = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}$

- $\nabla^3 y_i = \nabla\left(\nabla^2 y_i\right) = y_i - 3y_{i-1} + 3y_{i-2} - y_{i-3}$ (5.19)
- $\nabla^3 y_i = \nabla\left(\nabla^2 y_i\right) = y_i - 3y_{i-1} + 3y_{i-2} - y_{i-3}$

....

- $\nabla^n y_i = y_i - C_n^1 y_{i-1} + C_n^2 y_{i-2} + ... + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} y_{i-n+1} + (-1)^n y_{i-n}$

Dezvoltând în serie Taylor funcția *f(x) în stânga* punctului *x* se obține*:*

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(x) + ... \tag{5.20}$$

Ținând seama de proprietățile operatorului diferențial prezentate la paragraful 5.1 şi de dezvoltarea în serie a funcției exponențiale:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + ... \tag{5.21}$$

se poate exprima dezvoltarea în serie Taylor (5.20) sub formă simbolică astfel:

$$f(x-h) = \left(1 - hD + \frac{h^2}{2} D^2 - \frac{h^3}{6} D^3 + ...\right) f(x) = e^{-hD} y(x) \tag{5.22}$$

Notând $y_i = y(x)$; $y_{i-1} = y(x-h)$ relația (5.22) se scrie sub forma simbolică astfel:

$$y_{i-1} = e^{-hD} y_i \tag{5.23}$$

Diferența regresivă de ordinul unu se scrie sub forma simbolică:

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1} = \left(1 - e^{-hD}\right) y_i \tag{5.24}$$

Prin identificare în relația (5.24) se obține *expresia simbolică a primei diferențe regresive* ∇ în funcție de operatorii diferențiali ai funcției *f(x)*:

$$\nabla = 1 - e^{-hD} = hD - \frac{h^2 D^2}{2} + \frac{h^3 D^3}{6} - \frac{h^4 D^4}{24} + \frac{h^5 D^5}{120} - \frac{h^6 D^6}{720} + \frac{h^7 D^7}{5040} - ... \tag{5.25}$$

În mod similar se determină diferențele regresive de ordin superior în funcție de operatorii diferențiali ai funcției *f(x)*:

$$\nabla^2 = \left(1 - e^{-hD}\right)^2 = h^2 D^2 - h^3 D^3 + \frac{7}{12} h^4 D^4 - \frac{1}{4} h^5 D^5 + \frac{31}{320} h^6 D^6 - \frac{1}{40} h^7 D^7 + ... \tag{5.26}$$

$$\nabla^3 = \left(1 - e^{-hD}\right)^3 = h^3 D^3 - \frac{3}{2} h^4 D^4 + \frac{5}{4} h^5 D^5 - \frac{3}{4} h^6 D^6 + \frac{43}{120} h^7 D^7 - ... \tag{5.27}$$

$$\nabla^4 = \left(1 - e^{-hD}\right)^4 = h^4 D^4 - 2h^5 D^5 + \frac{13}{6} h^6 D^6 - \frac{5}{3} h^7 D^7 + ... \tag{5.28}$$

$$\nabla^5 = \left(1 - e^{-hD}\right)^5 = h^5 D^5 - \frac{5}{2} h^6 D^6 + \frac{10}{3} h^7 D^7 - ... \tag{5.29}$$

$$\nabla^6 = \left(1 - e^{-hD}\right)^6 = h^6 D^6 - 3h^7 D^7 + ... \tag{5.30}$$

Aplicația 5.2

Să se determine primele şase diferenţe regresive ale funcţiei $f(x)=x^2-lnx$ definită pe intervalul [1; 2,6], dacă se cunosc valorile ei în 17 puncte echidistante situate la distanţa h=0,1. Să se verifice rezultatele obţinute folosind relaţiile (5.25) ... (5.30) cu primele şase derivate ale funcţiei $f(x)$.

Rezolvare

Valorile diferenţelor finite regresive se calculează cu relaţiile (5.19) şi sunt date în tabelul 5.3:

Tabelul 5.3

i	x_i	y_i	∇y_i	$\nabla^2 y_i$	$\nabla^3 y_i$	$\nabla^4 y_i$	$\nabla^5 y_i$	$\nabla^6 y_i$
0	1	1.000000						
1	1.1	1.235690	0.235690					
2	1.2	1.545678	0.309989	0.074299				
3	1.3	1.934636	0.388957	0.078969	0.004670			
4	1.4	2.407528	0.472892	0.083935	0.004966	0.000296		
5	1.5	2.969535	0.562007	0.089115	0.005180	0.000214	-0.000082	
6	1.6	3.625996	0.656461	0.094454	0.005339	0.000159	-0.000055	0.000026
7	1.7	5.2.382372	0.756375	0.099914	0.005460	0.000120	-0.000039	0.000017
8	1.8	5.244213	0.861842	0.105466	0.005552	0.000093	-0.000028	0.000011
9	1.9	6.217146	0.972933	0.111091	0.005625	0.000073	-0.000020	0.000007
10	2	7.306853	1.089707	0.116774	0.005683	0.000058	-0.000015	0.000005
11	2.1	8.519063	1.212210	0.122503	0.005729	0.000046	-0.000011	0.000004
12	2.2	9.859543	1.340480	0.128270	0.005767	0.000038	-0.000009	0.000003
13	2.3	11.334091	1.474548	0.134068	0.005798	0.000031	-0.000007	0.000002
14	2.4	12.948531	1.614440	0.139892	0.005824	0.000026	-0.000005	0.000001
15	2.5	15.2.70871	1.760178	0.145738	0.005845	0.000022	-0.000004	0.000001
16	2.6	16.620489	1.911779	0.151601	0.005864	0.000018	-0.000003	0.000001

Expresiile primelor şase derivate ale funcţiei $f(x)=x^3-ln\,x$ sunt date de relaţiile (5.18). Folosind relaţiile (5.25) ... (5.30) şi înlocuind valorile obţinute pentru primele şase derivate ale funcţiei se obţin valorile din tabelul 5.4.

Tabelul 5.4

i	x_i	y_i	∇y_i	$\nabla^2 y_i$	$\nabla^3 y_i$	$\nabla^4 y_i$
0	1	1.000000				
1	1.1	1.235690	0.235691			
2	1.2	1.545678	0.309989	0.070006		
3	1.3	1.934636	0.388958	0.074271	0.000135	
4	1.4	2.407528	0.472892	0.078950	0.000373	0.000410
5	1.5	2.969535	0.562007	0.083922	0.000533	0.000289
6	1.6	3.625996	0.656462	0.089106	0.000644	0.000210
7	1.7	5.2.382372	0.756376	0.094448	0.000723	0.000156
8	1.8	5.244213	0.861842	0.099909	0.000781	0.000119

9	1.9	6.217146	0.972933	0.105463	0.000824	0.000092
10	2	7.306853	1.089707	0.111089	0.000857	0.000072
11	2.1	8.519063	1.212210	0.116772	0.000882	0.000057
12	2.2	9.859543	1.340480	0.122502	0.000902	0.000046
13	2.3	11.334091	1.474548	0.128269	0.000918	0.000038
14	2.4	12.948531	1.614440	0.134067	0.000930	0.000031
15	2.5	15.2.708709	1.760178	0.139891	0.000940	0.000026
16	2.6	16.620489	1.911779	0.145737	0.000949	0.000021

Din analiza rezultatelor obținute prin cele două metode se observă o bună apropiere a rezultatelor pentru primele trei diferențe finite. Pentru diferențele finite de ordin superior se constată erori de calcul mari datorită numărului redus de termeni ai aproximării şi a erorilor care se cumulează la calculul diferențelor finite.

5.3. Diferențe centrale

Se consideră o funcție continuă de n ori derivabilă $f : [a, b] \rightarrow R$ şi un număr n de puncte din intervalul de definiție, numite *noduri ale rețelei,* egal depărtate între ele şi situate la distanța $h/2$, notate cu: $a=x_0$, ... x_{i-2}, $x_{i-3/2}$, x_{i-1}, $x_{i-1/2}$, x_i, $x_{i+1/2}$, x_{i+1}, $x_{i+3/2}$, x_{i+2}, ... $x_n=b$. Valorile funcției în nodurile rețelei sunt notate cu: y_0 ...y_{i-2}, $y_{i-3/2}$, y_{i-1}, $y_{i-1/2}$, y_i, $y_{i+1/2}$, y_{i+1}, $y_{i+3/2}$, y_{i+2}, ...y_n.

Se definesc *diferențele centrale* a funcției *f(x)* în punctul x_i , astfel:

- $\delta y_i = y_{i+1/2} - y_{i-1/2}$
- $\delta^2 y_i = \delta(y_{i+1/2} - y_{i-1/2}) = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$
- $\delta^3 y_i = \delta(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) = y_{i+3/2} - 3y_{i+1/2} + 3y_{i-1/2} - y_{i-3/2}$
- $\delta^4 y_i = \delta(\delta^3 y_i) = y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}$ (5.31)
- $\delta^5 y_i = \delta(\delta^4 y_i) = y_{i+5/2} - 5y_{i+3/2} + 10y_{i+1/2} - 10y_{i-1/2} + 5y_{i-3/2} - y_{i-5/2}$
- $\delta^6 y_i = \delta(\delta^5 y_i) = y_{i+3} - 6y_{i+2} + 15y_{i+1} - 20y_i + 15y_{i-1} - 6y_{i-2} + y_{i-3}$

. . . .

- $\delta^n y_i = \delta(\delta^{n-1} y_i)$

Pentru a se evita folosirea valorilor funcției *f(x)* în punctele intermediare: ... $x_{i-3/2}$, $x_{i-1/2}$, $x_{i+1/2}$, $x_{i+3/2}$, ... se introduc *diferențele medii centrale impare*, definite ca medii ale diferențelor centrale impare în punctele intermediare:

- $\mu\delta y_i = \frac{1}{2}(\delta y_{i-1/2} + \delta y_{i+1/2}) = \frac{1}{2}[(y_i - y_{i-1}) + (y_{i+1} - y_i)] = \frac{1}{2}(y_{i+1} - y_{i-1})$ (5.32)
- $\mu\delta^3 y_i = \frac{1}{2}[y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}]$ (5.33)
- $\mu\delta^5 y_i = \frac{1}{2}[y_{i+3} - 4y_{i+2} + 5y_{i+1} - 5y_{i-1} + 4y_{i-2} - y_{i-3}]$ (5.34)

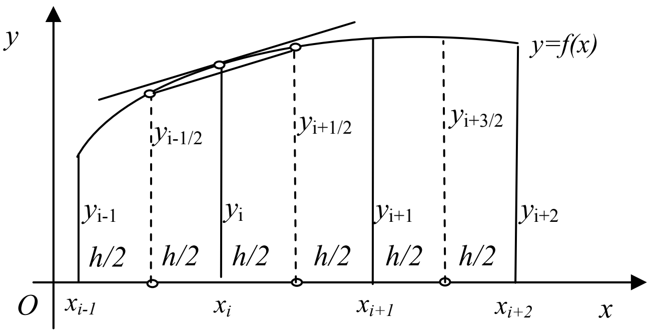


Fig.5.1

Din punct de vedere geometric, medierea diferențelor centrale impare este echivalentă cu aproximarea pantei tangentei la graficul lui *f(x)* în punctul (x_i, y_i) cu panta coardei care trece prin punctele (x_{i-1}, y_{i-1}) şi (x_{i+1}, y_{i+1}) (fig. 5.1).

Medierea lui y_i se poate realiza cu ajutorul *operatorului mediator* μ:

$$\mu y_i = \frac{1}{2}\left(y_{i-1/2} + y_{i+1/2}\right) \tag{5.35}$$

Se poate găsi o relație de legătură dintre *operatorul mediator* μ şi operatorul δ, calculând $\mu^2 y_i$ şi $\left(1+\frac{\delta^2}{4}\right)y_i$:

$$\mu^2 y_i = \mu\left[\frac{1}{2}\left(y_{i-1/2} + y_{i+1/2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(y_i + y_{i-1}\right) + \frac{1}{2}\left(y_{i+1} + y_i\right)\right] = \frac{1}{4}\left(y_{i+1} + 2y_i + y_{i-1}\right) \tag{5.36}$$

$$\left(1+\frac{\delta^2}{4}\right)y_i = y_i + \frac{1}{4}\left(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}\right) = \frac{1}{4}\left(y_{i+1} + 2y_i + y_{i-1}\right) \tag{5.37}$$

Rezultă relația simbolică între *operatorul mediator* μ *şi operatorul* δ:

$$\mu^2 = \left(1+\frac{\delta^2}{4}\right) \tag{5.38}$$

Ținând seama de relațiile (5.8) şi (5.23), relația (5.32) se scrie:

$$\mu\delta\, y_i = \frac{1}{2}\left(y_{i+1} - y_{i-1}\right) = \left(\frac{e^{hD} - e^{-hD}}{2}\right)y_i = sh(hD)y_i \tag{5.39}$$

Din relația (5.39) rezultă următoarea relație simbolică între diferența centrală medie $\mu\delta$ şi operatorul diferențial *D*:

$$\mu\delta = sh(hD) \tag{5.40}$$

Dezvoltarea în serie a funcției *f(x)=shx* este:

$$shx = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \ldots \tag{5.41}$$

Din relația (5.40) se obține expresia simbolică a *primei diferențe centrale medii* în funcție de operatorii diferențiali $D, D^3, D^5, ...$

$$\mu\delta = hD + \frac{1}{6}h^3D^3 + \frac{1}{120}h^5D^5 + ... \qquad (5.42)$$

A doua diferență centrală dată de relația (5.32) se poate scrie simbolic folosind expresiile (5.8) şi (5.23) pentru y_{i+1} şi y_{i-1}:

$$\delta^2 y_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = 2\left(\frac{e^{hD} + e^{-hD}}{2} - 1\right)y_i \qquad (5.43)$$

Din relația (5.43) rezultă următoarea relație simbolică între operatorii δ^2 şi D:

$$\delta^2 = 2[ch(hD) - 1] \qquad (5.44)$$

Dezvoltarea în serie a funcției chx este:

$$chx = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + ... \qquad (5.45)$$

Din relația (5.44) se obține expresia simbolică a celei de *a doua diferențe centrale* δ^2 în funcție de operatorii diferențiali $D^2, D^4, D^6, D^8, ...$:

$$\delta^2 = h^2D^2 + \frac{1}{12}h^4D^4 + \frac{1}{360}h^6D^6 + \frac{1}{20160}h^8D^8 + ... \qquad (5.46)$$

Expresia simbolică a celei de *a treia diferențe centrale medii* se obține prin înmulțirea simbolică a operatorilor $\mu\delta$ şi δ^2 date de relațiile (5.42) şi (5.46) şi se scrie simbolic:

$$\mu\delta^3 = h^3D^3 + \frac{1}{4}h^5D^5 + \frac{1}{40}h^7D^7 + ... \qquad (5.47)$$

Expresia simbolică a celei de *a patra diferențe centrale* în funcție de derivatele $D^2, D^4, D^6, D^8, ...$ se obține prin ridicarea simbolică la pătrat a operatorului δ^2 dat de relația (5.22) şi se scrie simbolic:

$$\delta^4 = h^4D^4 + \frac{1}{6}h^6D^6 + \frac{1}{80}h^8D^8 + ... \qquad (5.48)$$

Diferențele centrale medii (impare) şi diferențe centrale (pare) se calculează folosind acelaşi algoritm:

$$\mu\delta^5 = h^5D^5 + \frac{1}{3}h^7D^7 + ... \qquad (5.49)$$

$$\delta^6 = h^6D^6 + \frac{1}{4}h^8D^8 + ... \qquad (5.50)$$

Aplicația 5.3

Să se determine diferențele centrale pentru valorile funcției $f(x)=x^2-lnx$ definită pe intervalul [*1; 2,5*] în puncte echidistante situate la distanța *h=0,1* şi să se verifice rezultatele folosind relațiile (5.42), (5.46)... (5.50) între operatorii diferențelor centrale $\mu\delta$, δ^2 $\mu\delta^3$, δ^4, $\mu\delta^5$ şi δ^6 şi operatorii diferențiali D, D^2, D^3...

Rezolvare

Folosind formulele (5.31) ... (5.34) pentru calculul diferențelor centrale pare: δ^2, δ^4, δ^6 respectiv a diferențelor centrale medii impare $\mu\delta$, $\mu\delta^3$, $\mu\delta^5$ se obțin valorile din tabelul 5.5.

Expresiile primelor opt derivate ale funcției f(x) sunt:

$$f'(x)=2x-\frac{1}{x};\quad f''(x)=2+\frac{1}{x^2};\quad f'''(x)=-\frac{2}{x^3};\quad f^{(4)}(x)=\frac{6}{x^4};$$
$$f^{(5)}(x)=-\frac{24}{x^5};\quad f^{(6)}(x)=\frac{120}{x^6};\quad f^{(7)}(x)=-\frac{720}{x^7};\quad f^{(8)}(x)=\frac{5040}{x^8} \tag{5.51}$$

Tabelul 5.5

i	*xi*	*yi*	$\mu\delta yi$	$\delta^2 yi$	$\mu\delta^3 yi$	$\delta^4 yi$	$\mu\delta^5 yi$	$\delta^6 yi$
0	1	1.000000						
1	1.1	1.114690	0.128839	0.028299				
2	1.2	1.257678	0.156473	0.026969	-0.001182	0.000296		
3	1.3	1.427636	0.182925	0.025935	-0.000927	0.000214	-0.057414	
4	1.4	1.623528	0.208450	0.025115	-0.000740	0.000159	-0.071541	0.000017
5	1.5	1.844535	0.233234	0.024454	-0.000601	0.000120	-0.085012	0.000011
6	1.6	2.089996	0.257418	0.023914	-0.000494	0.000093	-0.097970	0.000007
7	1.7	2.359372	0.281108	0.023466	-0.000411	0.000073	-0.110521	0.000005
8	1.8	2.652213	0.304387	0.023091	-0.000346	0.000058	-0.122744	0.000004
9	1.9	2.968146	0.327320	0.022774	-0.000294	0.000046	-0.134698	0.000003
10	2	3.306853	0.349958	0.022503	-0.000252	0.000038	-0.146428	0.000002
11	2.1	3.668063	0.372345	0.022270	-0.000217	0.000031	-0.157972	0.000001
12	2.2	5.3.051543	0.394514	0.022068	-0.000189	0.000026	-0.169358	0.000001
13	2.3	5.3.457091	0.416494	0.021892	-0.000165	0.000022	-0.180609	
14	2.4	5.3.884531	0.438309	0.021738	-0.000145	0.000018		
15	2.5	5.333709	0.459979	0.021601				
16	2.6	5.804489						

Înlocuind valorile obținute pentru primele opt derivate ale funcției în relațiile (5.42), (5.46)... (5.50) pentru determinarea diferențelor centrale se obțin valorile din tabelul 5.6.

Tabelul 5.6

i	*xi*	*yi*	$\mu\delta yi$	$\delta^2 yi$	$\mu\delta^3 yi$	$\delta^4 yi$
0	1	1.000000				
1	1.1	1.114690	0.128839	0.028299		
2	1.2	1.257678	0.156473	0.026969	-0.001182	0.000289
3	1.3	1.427636	0.182925	0.025935	-0.000926	0.000210
4	1.4	1.623528	0.208450	0.025115	-0.000740	0.000156
5	1.5	1.844535	0.233234	0.024454	-0.000600	0.000119
6	1.6	2.089996	0.257418	0.023914	-0.000494	0.000092
7	1.7	2.359372	0.281108	0.023466	-0.000411	0.000072
8	1.8	2.652213	0.304387	0.023091	-0.000346	0.000057
9	1.9	2.968146	0.327320	0.022774	-0.000294	0.000046
10	2	3.306853	0.349958	0.022503	-0.000252	0.000038
11	2.1	3.668063	0.372345	0.022270	-0.000217	0.000031
12	2.2	5.3.051543	0.394514	0.022068	-0.000189	0.000026
13	2.3	5.3.457091	0.416494	0.021892	-0.000165	0.000021
14	2.4	5.3.884531	0.438309	0.021738	-0.000145	0.000018
15	2.5	5.333709	0.459979	0.021601		
16	2.6	5.804489				

Din analiza rezultatelor obţinute în cele două tabele se observă o bună apropiere a rezultatelor pentru primele patru diferenţe finite. Faţă de celelalte rezultate obţinute cu diferenţe finite progresive şi regresive, se constată în acest caz o mai bună apropiere a rezultatelor obţinite prin cele două metode. Folosirea diferenţelor finite centrale şi centrale medii asigură o precizie mai ridicată a calculelor.

5.4. Derivarea cu ajutorul diferenţelor finite

O aplicaţie imediată a calculului cu diferenţe finite o reprezintă derivarea cu ajutorul diferenţelor finite prezentată în continuare.

5.4.1. Derivarea cu ajutorul diferenţelor progresive

Ţinând seama de relaţiile simbolice (5.12) ... (5.17) dintre operatorii diferenţelor finite progresive Δ, Δ^2, Δ^3, ... şi operatorii diferenţiali D, D^2, D^3, ... se pot scrie următoarele relaţii:

$$\begin{cases} D = \dfrac{\Delta}{h} - \dfrac{1}{2}hD^2 - \dfrac{1}{6}h^2D^3 - \ldots \\ D^2 = \dfrac{\Delta^2}{h^2} - hD^3 - \dfrac{7}{12}h^2D^4 - \ldots \end{cases} \quad \begin{cases} D^3 = \dfrac{\Delta^3}{h^3} - \dfrac{3}{2}hD^4 - \dfrac{5}{4}h^2D^5 - \ldots \\ D^4 = \dfrac{\Delta^4}{h^4} - 2hD^5 - \dfrac{13}{6}h^6D^6 - \ldots \end{cases} \tag{5.52}$$

Ordinul erorilor de aproximare pentru calculul derivatelor de ordinul I, II, III şi IV se determină astfel:

- dacă se ia în considerare doar primul termen al relațiilor (5.52), se obțin relații de calcul ale derivatelor cu o eroare de ordinul lui h:

$$\begin{aligned}
Dy_i &= \frac{\Delta y_i}{h} + 0(h) \cong \frac{1}{h}\left(y_{i+1} - y_i\right) \\
D^2 y_i &= \frac{\Delta^2 y_i}{h^2} + 0(h) \cong \frac{1}{h^2}\left(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i\right) \\
D^3 y_i &= \frac{\Delta^3 y_i}{h^3} + 0(h) \cong \frac{1}{h^3}\left(y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i\right) \\
D^4 y_i &= \frac{\Delta^4 y_i}{h^3} + 0(h) \cong \frac{1}{h^4}\left(y_{i+4} - 4y_{i+3} + 6y_{i+2} - 4y_{i+1} + y_i\right)
\end{aligned} \tag{5.53}$$

- dacă se iau în considerare doar primii doi termeni al relațiilor (5.52) şi se înlocuieşte în prima relație (5.52) expresia lui D^2 dată de a doua relație, în a doua relație expresia lui D^3 dată de a treia relație şi în a treia relație expresia lui D^4 dată de a patra relație(5.52), se obțin următoarele relații de calcul ale derivatelor cu o eroare de ordinul lui h^2:

$$\begin{aligned}
Dy_i &= \frac{1}{h}\left(\Delta y_i - \frac{\Delta^2 y_i}{2}\right) + 0(h^2) = \frac{1}{2h}\left(-3y_i + 4y_{i+1} - y_{i+2}\right) + 0(h^2) \\
D^2 y_i &= \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_i - \Delta^3 y_i\right) + 0(h^2) = \frac{1}{h^2}\left(2y_i - 5y_{i+1} + 4y_{i+2} - y_{i+3}\right) + 0(h^2) \\
D^3 y_i &= \frac{1}{h^3}\left(\Delta^3 y_i - \frac{3\Delta^4 y_i}{2}\right) + 0(h^2) = \frac{1}{2h^3}\left(-5y_i + 18y_{i+1} - 24y_{i+2} + 14y_{i+3} - 3y_{i+4}\right) + 0(h^2)
\end{aligned} \tag{5.54}$$

O altă metodă utilizată pentru scrierea expresiilor derivatelor în funcție de diferențele progresive are la bază dezvoltarea în serie a relației simbolice (5.10) dintre operatorii D şi Δ:

$$e^{hD} = 1 + \Delta \quad \Leftrightarrow \quad hD = ln(1 + \Delta) \tag{5.55}$$

Formula de dezvoltare în serie a funcției $ln(1+ x)$ se scrie astfel:

$$ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - ... \tag{5.56}$$

Ținând seama de aceasta, relația (5.55) devine:

$$hD = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \frac{\Delta^5}{5} - ... \tag{5.57}$$

Pentru calculul derivatelor se împarte relația (5.7) cu h şi ridică simbolic la diferite puteri obținându-se următoarele relații simbolice pentru calculul derivatelor în funcție de diferențele finite progresive:

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{1}{h}\left(\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \frac{1}{4}\Delta^4 + \frac{1}{5}\Delta^5 ...\right)\\
D^2 &= \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12}\Delta^4 - \frac{5}{6}\Delta^5 + ...\right)\\
D^3 &= \frac{1}{h^3}\left(\Delta^3 - \frac{3}{2}\Delta^4 + \frac{7}{4}\Delta^5 + ...\right)\\
D^4 &= \frac{1}{h^4}\left(\Delta^4 - 2\Delta^5 + \frac{17}{6}\Delta^6 + ...\right)\\
D^5 &= \frac{1}{h^5}\left(\Delta^5 - \frac{5}{2}\Delta^6 + \frac{25}{6}\Delta^7 + ...\right)
\end{aligned}
\tag{5.58}
$$

Primii doi termeni din parantezele relației (5.58) sunt identici cu cei obținuți prin prima metodă, conform relațiilor (5.54).

Aplicația 5.4

Folosind relațiile (5.58) de derivare cu ajutorul diferențelor finite progresive să se determine derivatele de ordinul I, II, III, IV şi V pentru funcția $f(x)= x^2 - \ln x$ în punctul $x=1$ dacă funcția este definită discret în punctele: $x=1; 1,1; ... ; 2,6$.

Rezolvare

- diferențele progresive ale funcției $f(x)$ calculate în punctele: $x=1; 1,1... 2$ sunt prezentate în tabelul 5.7;
- valorile derivatelor funcției $f(x)$ calculate în punctele: $x=1; 1,1... 2$ folosind primele şase diferențe finite progresive cu ajutorul relațiilor (5.58) sunt prezentate în tabelul 5.8;
- valorile exacte ale derivatelor în punctele respective calculate cu ajutorul relațiilor (5.51) pentru verificarea rezultatelor sunt prezentate în tabelul 5.9.

Tabelul 5.7

xi	*yi*	*Δ*	*Δ*²	*Δ*³	*Δ*⁴	*Δ*⁵	*Δ*⁶
1	1	0.1146898	0.028299	-0.001330	0.000296	-0.000082	0.000026
1.1	1.11469	0.1429886	0.026969	-0.001034	0.000214	-0.000055	0.000017
1.2	1.257678	0.1699573	0.025935	-0.000820	0.000159	-0.000039	0.000011
1.3	1.427636	0.195892	0.025115	-0.000661	0.000120	-0.000028	0.000007
1.4	1.623528	0.2210071	0.024454	-0.000540	0.000093	-0.000020	0.000005
1.5	1.844535	0.2454615	0.023914	-0.000448	0.000073	-0.000015	0.000004
1.6	2.089996	0.2693754	0.023466	-0.000375	0.000058	-0.000011	0.000003
1.7	2.359372	0.2928416	0.023091	-0.000317	0.000046	-0.000009	0.000002
1.8	2.652213	0.3159328	0.022774	-0.000271	0.000038	-0.000007	0.000001
1.9	2.968146	0.3387067	0.022503	-0.000233	0.000031	-0.000005	0.000001
2	3.306853	0.3612098	0.02227	-0.000202	0.000026	-0.000004	0.000001
2.1	3.668063	0.38348	0.022068	-0.000176	0.000022	-0.000003	

2.2	4.051543	0.4055482	0.021892	-0.000155	0.000018		
2.3	4.457091	0.4274404	0.021738	-0.000136			
2.4	4.884531	0.449178	0.021601				
2.5	5.333709	0.4707793					
2.6	5.804489						

Tabelul 5.8

x	*f(x)*	*f'(x)*	*f''(x)*	*f'''(x)*	$f^{IV}(x)$	$f^{V}(x)$
1	1.000000	1.000022	2.996870	-1.917759	5.350459	-14.811664
1.1	1.114690	1.290922	2.824522	-1.452357	3.728104	-9.748731
1.2	1.257678	1.566674	2.693217	-1.125486	2.673510	-7.5.619935
1.3	1.427636	1.830774	2.590908	-0.889394	1.965034	-4.617926
1.4	1.623528	2.085717	2.509657	-0.714737	1.475402	-3.297757
1.5	1.844535	2.333335	2.444065	-0.582826	1.128573	-2.404002
1.6	2.089996	2.575001	2.390356	-0.481381	0.877533	-1.784734
1.7	2.359372	2.811766	2.345827	-0.402114	0.692320	-1.346722
1.8	2.652213	3.044445	2.308499	-0.339294	0.553330	-1.031155
1.9	2.968146	3.273685	2.276902	-0.288878	0.447425	-0.800004
2	3.306853	3.500000	2.249920	-0.247956	0.365614	-0.628131

Tabelul 5.9

x	*f(x)*	*f'(x)*	*f''(x)*	*f'''(x)*	$f^{IV}(x)$	$f^{V}(x)$
1	1.000000	1.000000	3.000000	-2.000000	7.5.000000	
1.1	1.114690	1.290909	2.826446	-1.502630	4.098081	-14.902112
1.2	1.257678	1.566667	2.694444	-1.157407	2.893519	-9.645062
1.3	1.427636	1.830769	2.591716	-0.910332	2.100767	-7.5.463898
1.4	1.623528	2.085714	2.510204	-0.728863	1.561849	-4.462426
1.5	1.844535	2.333333	2.444444	-0.592593	1.185185	-3.160494
1.6	2.089996	2.575000	2.390625	-0.488281	0.915527	-2.288818
1.7	2.359372	2.811765	2.346021	-0.407083	0.718382	-1.690311
1.8	2.652213	3.044444	2.308642	-0.342936	0.571559	-1.270132
1.9	2.968146	3.273684	2.277008	-0.291588	0.460402	-0.969267
2	3.306853	3.500000	2.250000	-0.250000	0.375000	-0.750000

Din analiza rezultatelor obținute folosind diferențele finite progresive (tabelul 5.8) şi prin calcul analitic (tabelul 5.9) rezultă erori cu atât mai mari cu cât ordinul derivatei este mai mare datorită erorilor care se cumulează la calculul diferențelor finite.

5.4.2. Derivarea cu ajutorul diferențelor regresive

Ținând seama de relațiile simbolice (5.25)...(5.30) dintre operatorii diferențelor finite regresive $\nabla, \nabla^2, \nabla^3, \ldots$ şi operatorii diferențiali $D, D^2, D^3, \ldots$ se pot scrie următoarele relații:

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{\nabla}{h} + \frac{hD^2}{2} - \frac{h^2D^3}{6} - \frac{h^3D^4}{24} + \ldots \\
D^2 &= \frac{\nabla^2}{h^2} + hD^3 - \frac{7h^2D^4}{12} + \ldots \\
D^3 &= \frac{\nabla^3}{h^3} + \frac{3hD^4}{2} - \frac{5h^2D^5}{4} + \ldots \\
D^4 &= \frac{\nabla^4}{h^4} + 2hD^5 - \frac{13h^2D^6}{6} + \ldots
\end{aligned}
\tag{5.59}
$$

Ordinul erorii de aproximare se poate determina astfel:

- dacă se ia în considerare doar primul termen al relațiilor (5.59), se obțin următoarele relații de calcul ale derivatelor cu o eroare de ordinul lui h:

$$
\begin{aligned}
Dy_i &= \frac{\nabla y_i}{h} + 0(h) = \frac{1}{h}\left(y_i - y_{i-1}\right) + 0(h) \\
D^2y_i &= \frac{\nabla^2 y_i}{h^2} + 0(h) = \frac{1}{h^2}\left(y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}\right) + 0(h) \\
D^3y_i &= \frac{\nabla^3 y_i}{h^3} + 0(h) = \frac{1}{h^2}\left(y_i - 3y_{i-1} + 3y_{i-2} + y_{i-3}\right) + 0(h)
\end{aligned}
\tag{5.60}
$$

- dacă se înlocuiește în prima relație (5.59) expresia lui D^2 dată de a doua, în a doua relație expresia lui D^3 dată de a treia şi în a treia relație expresia lui D^4 dată de a patra, se obțin următoarele relații de calcul ale derivatelor cu o eroare de ordinul lui h^2:

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{1}{h}\left(\nabla + \frac{\nabla^2}{2}\right) + \frac{h^2D^3}{3} - \frac{h^3D^4}{3} + \ldots \\
D^2 &= \frac{1}{h^2}\left(\nabla^2 + \nabla^3\right) + \frac{11h^2D^4}{12} + \ldots \\
D^3 &= \frac{1}{h^3}\left(\nabla^3 + \frac{3\nabla^4}{2}\right) + \frac{7h^2D^5}{4} + \ldots
\end{aligned}
\tag{5.61}
$$

sau:

$$
\begin{aligned}
Dy_i &= \frac{1}{2h}\left(3y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}\right) + 0(h^2) \\
D^2y_i &= \frac{1}{h^2}\left(2y_i - 5y_{i-1} + 4y_{i-2} - y_{i-3}\right) + 0(h^2) \\
D^3y_i &= \frac{1}{2h^3}\left(5y_i - 18y_{i-1} + 24y_{i-2} - 14y_{i-3} + 3y_{i-4}\right) + 0(h^2)
\end{aligned}
\tag{5.62}
$$

Epresiile derivatelor în funcție de diferențele regresive corespunzătoare se pot determina cu ajutorul dezvoltării în serie a funcției *ln(1- x):*

$$
ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \ldots
\tag{5.63}
$$

Ținând seama de relația simbolică (5.24) dintre operatorii D şi ∇:

$$e^{-hD} = 1 - \nabla \;\Rightarrow -hD = ln(1 - \nabla) \qquad (5.64)$$

şi de dezvoltarea în serie a funcției *ln(1- x)*, se obține relația simbolică:

$$hD = \nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + \frac{\nabla^5}{5} + ... \qquad (5.65)$$

sau:

$$D = \frac{1}{h}\left(\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + \frac{\nabla^5}{5} + ...\right) \qquad (5.66)$$

Ridicând la putere relația simbolicâ (5.66) se obțin operatorii diferențiali superiori în funcție de diferențele regresive:

$$\begin{aligned} D^2 &= \frac{1}{h^2}\left(\nabla^2 + \nabla^3 + \frac{11}{12}\nabla^4 + \frac{5}{6}\nabla^5 + ...\right) \\ D^3 &= \frac{1}{h^3}\left(\nabla^3 + \frac{3}{2}\nabla^4 + \frac{7}{4}\nabla^5 + ...\right) \\ D^4 &= \frac{1}{h^4}\left(\nabla^4 + 2\nabla^5 + \frac{17}{6}\nabla^6 + ...\right) \\ D^5 &= \frac{1}{h^5}\left(\nabla^5 + \frac{5}{2}\nabla^6 + \frac{25}{6}\nabla^7 + ...\right) \end{aligned} \qquad (5.67)$$

Se observă că primii doi termeni ai parantezelor relației (5.67) sunt identici cu cei obținuți prin prima metodă din relațiile (5.61).

Aplicația 5.5

Folosind relațiile (5.67) de derivare cu ajutorul diferențelor finite regresive să se determine derivatele de ordinul I, II, III, IV şi V pentru funcția $f(x)= x^2 - lnx$ în punctul $x=1$ dacă funcția este definită discret în punctele: $x=1; 1,1; ... ; 2,6$.

Rezolvare

- diferențele regresive ale funcției *f(x)* calculate în punctele: $x=1; 1,1... 2$ sunt prezentate în tabelul 5.10;
- valorile derivatelor funcției *f(x)* calculate în punctele: $x=1; 1,1... 2$ cu ajutorul relațiilor (5.67) folosind primele şase diferențe finite regresive sunt prezentate în tabelul 5.11;

Tabelul 5.10

xi	*yi*	∇	∇^2	∇^3	∇^4	∇^5	∇^6
1.0	1.000000						
1.1	1.114690						
1.2	1.257678	0.142989					

1.3	1.427636	0.169957	0.026969				
1.4	1.623528	0.195892	0.025935	-0.001034			
1.5	1.844535	0.221007	0.025115	-0.000820	0.000214		
1.6	2.089996	0.245461	0.024454	-0.000661	0.000159	-0.000055	
1.7	2.359372	0.269375	0.023914	-0.000540	0.000120	-0.000039	0.000017
1.8	2.652213	0.292842	0.023466	-0.000448	0.000093	-0.000028	0.000011
1.9	2.968146	0.315933	0.023091	-0.000375	0.000073	-0.000020	0.000007
2.0	3.306853	0.338707	0.022774	-0.000317	0.000058	-0.000015	0.000005
2.1	3.668063	0.361210	0.022503	-0.000271	0.000046	-0.000011	0.000004
2.2	4.051543	0.383480	0.022270	-0.000233	0.000038	-0.000009	0.000003
2.3	4.457091	0.405548	0.022068	-0.000202	0.000031	-0.000007	0.000002
2.4	4.884531	0.427440	0.021892	-0.000176	0.000026	-0.000005	0.000001
2.5	5.333709	0.449178	0.021738	-0.000155	0.000022	-0.000004	0.000001
2.6	5.804489	0.470779	0.021601	-0.000136	0.000018	-0.000003	0.000001

Tabelul 5.11

x	*f(x)*	*f'(x)*	*f''(x)*	*f'''(x)*	*f4(x)*	*f5(x)*
1.7	2.359372	2.811773	2.345157	-0.427526	0.908114	0.348766
1.8	2.652213	3.044450	2.308060	-0.356746	0.689765	0.007450
1.9	2.968146	3.273688	2.276606	-0.301148	0.536334	-0.144410
2.0	3.306853	3.500002	2.249716	-0.256762	0.425103	-0.203240
2.1	3.668063	3.723811	2.226553	-0.220834	0.342366	-0.216690
2.2	4.051543	3.945456	2.206462	-0.191404	0.279491	-0.208740
2.3	4.457091	4.165218	2.188925	-0.167041	0.230836	-0.191558
2.4	4.884531	4.383334	2.173527	-0.146686	0.192597	-0.171287
2.5	5.333709	4.600000	2.159936	-0.129538	0.162138	-0.150951
2.6	5.804489	4.815385	2.147879	-0.114981	0.137589	-0.131953

- valorile exacte ale derivatelor în punctele respective, determinate cu ajutorul realațiilor :

$$f'(x)=2x-\frac{1}{x};\quad f''(x)=2+\frac{1}{x^2};\quad f'''(x)=-\frac{2}{x^3};\quad f^{(4)}(x)=\frac{6}{x^4};$$
$$f^{(5)}(x)=-\frac{24}{x^5};\quad f^{(6)}(x)=\frac{120}{x^6};\quad f^{(7)}(x)=-\frac{720}{x^7};\quad f^{(8)}(x)=\frac{5040}{x^8} \tag{5.68}$$

sunt prezentate în tabelul 5.12.

Tabelul 5.12

x	*f(x)*	*f'(x)*	*f''(x)*	*f'''(x)*	$f^{IV}(x)$	$f^{V}(x)$
1.7	2.359372	2.811765	2.346021	-0.407083	0.718382	-1.690311
1.8	2.652213	3.044444	2.308642	-0.342936	0.571559	-1.270132
1.9	2.968146	3.273684	2.277008	-0.291588	0.460402	-0.969267

2.0	3.306853	3.500000	2.250000	-0.250000	0.375000	-0.750000
2.1	3.668063	3.723810	2.226757	-0.215959	0.308513	-0.587645
2.2	4.051543	3.945455	2.206612	-0.187829	0.256130	-0.465691
2.3	4.457091	4.165217	2.189036	-0.164379	0.214407	-0.372883
2.4	4.884531	4.383333	2.173611	-0.144676	0.180845	-0.301408
2.5	5.333709	4.600000	2.160000	-0.128000	0.153600	-0.245760
2.6	5.804489	4.815385	2.147929	-0.113792	0.131298	-0.201997

Din analiza rezultatelor obținute pentru primele cinci derivate folosind diferențele finite regresive (tabelul 5.11) şi prin calcul analitic (tabelul 5.12) rezultă erori cu atât mai mari cu cât ordinul derivatei este mai mare datorită erorilor care se cumulează la calculul diferențelor finite.

5.4.3. Derivarea cu ajutorul diferențelor finite centrale

Ținând seama relațiile simbolice (5.42), (5.46) ...(5.50) dintre operatorii diferențelor centrale $\delta^2, \delta^4, \delta^6,...$ şi centrale medii $\mu\delta, \mu\delta^3, \mu\delta^5$ ... şi operatorii diferențiali $D, D_2, D_3, ...$ se pot scrie următoarele relații:

$$D = \frac{1}{h}\left(\mu\delta - \frac{1}{6}h^3D^3 - \frac{1}{120}h^5D^5 - ...\right)$$

$$D^2 = \frac{1}{h^2}\left(\delta^2 - \frac{1}{12}h^4D^4 - \frac{1}{360}h^6D^6 - ...\right) \tag{5.69}$$

$$D^3 = \frac{1}{h^3}\left(\mu\delta^3 - \frac{1}{4}h^5D^5 - \frac{1}{40}h^7D^7 - ...\right)$$

$$D^4 = \frac{1}{h^4}\left(\delta^4 - \frac{1}{6}h^6D^6 - \frac{1}{80}h^8D^8 - ...\right)$$

Pentru a obține derivatele în funcție de diferențele centrale medii, respectiv în funcție de diferențele centrale, se folosesc relațiile simbolice (5.40) şi (5.38). Pentru diferențele centrale medii se scrie:

$$\mu\delta = sh(hD) \qquad \Rightarrow \; hD = arg\,sh\;\mu\delta \tag{5.70}$$

Dezvoltarea în serie a funcției $arg\,sh\;x$ este:

$$arg\,sh\;x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{30}x^5 - .... \tag{5.71}$$

Relația (5.70) se scrie sub forma simbolică astfel:

$$hD = \mu\delta - \frac{1}{6}\mu^3\delta^3 + \frac{1}{30}\mu^5\delta^5 - .... \tag{5.72}$$

Pentru puterile diferențelor centrale medii se foloseşte relația (5.38):

$$\mu^2 = \left(1 + \frac{\delta^2}{4}\right), \text{ la pătrat se obține: } \mu^4 = \left(1 + \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^4}{16}\right). \tag{5.73}$$

Înlocuind în relația (5.72) operatorii $\mu^3\delta^3 = \mu^2(\mu\delta^3)$; $\mu^5\delta^5 = \mu^4(\mu\delta^5)$..., se obține formula de calcul a derivatei întâi cu diferențe centrale medii:

$$hD = \mu\delta - \frac{1}{6}\mu\delta^3 + \frac{1}{30}\mu\delta^5 - ... \qquad (5.74)$$

Ridicând la diferite puteri relația simbolică (5.74) se obțin formulele de calcul cu diferențe centrale a derivatelor de ordinul II, III și IV:

$$D^2 = \frac{1}{h^2}\left(\delta^2 - \frac{1}{12}\delta^4 + \frac{1}{90}\delta^6 - ...\right)$$
$$D^3 = \frac{1}{h^3}\left(\mu\delta^3 - \frac{1}{4}\mu\delta^5 + \frac{7}{120}\mu\delta^7 - ...\right) \qquad (5.75)$$
$$D^4 = \frac{1}{h^4}\left(\delta^4 - \frac{1}{6}\delta^6 + \frac{7}{240}\delta^8 - ...\right)$$

Aplicația 5.6

Folosind relațiile de derivare cu ajutorul diferențelor finite centrale (5.75) să se determine derivatele de ordinul I, II, III, IV și V pentru funcția $f(x)= x^2 - lnx$ în punctul $x=1,8$ dacă funcția este definită discret în punctele: $x=1; 1,1; ... ; 2,6$.

Rezolvare

- diferențele finite centrale δ^2, δ^4, δ^6, ... și centrale medii $\mu\delta$, $\mu\delta^3$, $\mu\delta^5$, ... ale funcției *f(x)* calculate în punctele: *x=1; 1,1... 2* sunt prezentate în tabelul 5.13;
- valorile derivatelor funcției *f(x)* calculate în punctele: *x=1; 1,1... 2* cu ajutorul relațiilor (5.75) folosind primele șase diferențe finite centrale sunt prezentate în tabelul 5.14;

Tabelul 5.13

xi	*yi*	$\mu\delta$	δ^2	$\mu\delta^3$	δ^4	$\mu\delta^5$	δ^6
1	1						
1.1	1.11469	0.128839	0.028299				
1.2	1.257678	0.156473	0.026969	-0.00118	0.000296		
1.3	1.427636	0.182925	0.025935	-0.00093	0.000214	-0.000069	0.000026
1.4	1.623528	0.20845	0.025115	-0.00074	0.000159	-0.000047	0.000017
1.5	1.844535	0.233234	0.024454	-0.0006	0.000120	-0.000033	0.000011
1.6	2.089996	0.257418	0.023914	-0.00049	0.000093	-0.000024	0.000007
1.7	2.359372	0.281108	0.023466	-0.00041	0.000073	-0.000018	0.000005
1.8	2.652213	0.304387	0.023091	-0.00035	0.000058	-0.000013	0.000004
1.9	2.968146	0.32732	0.022774	-0.00029	0.000046	-0.000010	0.000003
2	3.306853	0.349958	0.022503	-0.00025	0.000038	-0.000008	0.000002
2.1	3.668063	0.372345	0.02227	-0.00022	0.000031	-0.000006	0.000001
2.2	4.051543	0.394514	0.022068	-0.00019	0.000026	-0.000005	0.000001
2.3	4.457091	0.416494	0.021892	-0.00017	0.000022	-0.000004	0.000001

2.4	4.884531	0.438309	0.021738	-0.00015	0.000018		
2.5	5.333709	0.459979	0.021601				
2.6	5.804489						

Tabelul 5.14

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{IV}(x)$
1.3	1.427636	1.830768	2.591717	-0.909620	2.098846
1.4	1.623528	2.085714	2.510205	-0.728443	1.560797
1.5	1.844535	2.333333	2.444445	-0.592335	1.184583
1.6	2.089996	2.575000	2.390625	-0.488118	0.915170
1.7	2.359372	2.811765	2.346021	-0.406977	0.718163
1.8	2.652213	3.044444	2.308642	-0.342865	0.571421
1.9	2.968146	3.273684	2.277008	-0.291539	0.460312
2	3.306853	3.500000	2.250000	-0.249966	0.374941
2.1	3.668063	3.723809	2.226757	-0.215936	0.308474
2.2	4.051543	3.945455	2.206612	-0.187811	0.256103
2.3	4.457091	4.165217	2.189036	-0.164366	0.214388

- valorile exacte ale derivatelor în punctele respective, determinate cu ajutorul relațiilor (5.68) sunt prezentate în tabelul 5.15.

Tabelul 5.15

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{IV}(x)$
1.3	1.427636	1.830769	2.591716	-0.910332	2.100767
1.4	1.623528	2.085714	2.510204	-0.728863	1.561849
1.5	1.844535	2.333333	2.444444	-0.592593	1.185185
1.6	2.089996	2.575000	2.390625	-0.488281	0.915527
1.7	2.359372	2.811765	2.346021	-0.407083	0.718382
1.8	2.652213	3.044444	2.308642	-0.342936	0.571559
1.9	2.968146	3.273684	2.277008	-0.291588	0.460402
2	3.306853	3.500000	2.250000	-0.250000	0.375000
2.1	3.668063	3.723810	2.226757	-0.215959	0.308513
2.2	4.051543	3.945455	2.206612	-0.187829	0.256130
2.3	4.457091	4.165217	2.189036	-0.164379	0.214407

Din analiza rezultatelor obținute pentru primele patru derivate folosind diferențele finite centrale și centrale medii (tabelul 5.14) și prin calcul analitic (tabelul 5.15) rezultă erori cu atât mai mari cu cât ordinul derivatei este mai mare datorită erorilor care se cumulează la calculul diferențelor finite centrale.

6. METODE NUMERICE PENTRU INTERPOLAREA FUNCȚIILOR

Interpolarea funcțiilor de o singură variabilă este o operație de aproximare a acestora foarte întâlnită în inginerie la prelucrarea datelor experimentale, care se realizează atunci când funcțiile sunt definite fie sub o formă *discretă* (într-o mulțime de puncte ale intervalului de definiție) fie sub o formă *analitică* (destul de complicată pentru a putea fi utilizată în calcule), aproximarea în acest caz făcându-se după determinarea valorilor funcției într-un număr finit de puncte. Interpolarea funcțiilor se face folosind diferite tipuri de *polinoame de interpolare*.

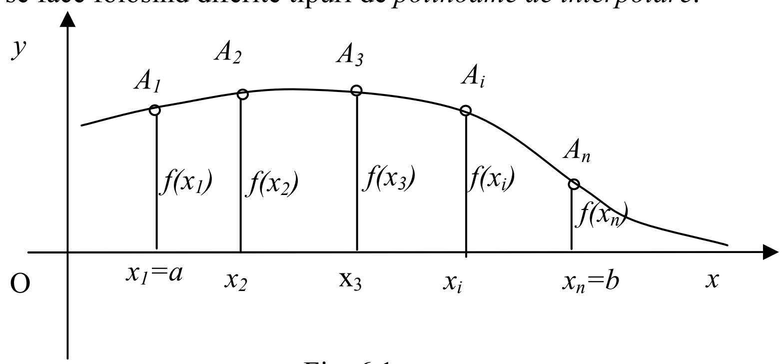


Fig. 6.1

Fie f: $[a, b] \rightarrow R$ o funcție definită pe intervalul $[a, b]$. Se consideră o rețea de noduri din acest interval, notată cu x_i $(i= 0, 1, 2, 3, ..., n)$ care împarte intervalul $[a, b]$ în n subintervale (x_{i-1}, x_i). Se cunosc valorile funcției $y_i = f(x_i)$ în nodurile x_i *(valori discrete)* şi se caută o funcție de aproximare $g(x)$ care să aibă aceleaşi valori sau foarte apropiate de valorile discrete ale funcției de aproximat $f(x)$ în nodurile x_i (fig.6.1). Pentru a se interpola o funcție dată sub formă discretă se folosesc următoarele tipuri de metode numerice:

1. *interpolarea polinomială,* utilizată atunci când funcția de aproximare $g(x)$ au aceleaşi valori cu cele ale funcției de aproximat $f(x)$ în nodurile rețelei x_i:

$$g(x_i) = f(x_i) \qquad i=0,1, 2, 3, ..., n. \tag{6.1}$$

O condiție suplimentară pentru unele metode de interpolare polinomială este legată de valorile derivatelor de ordinul I şi / sau II ale celor două funcții în nodurile rețelei (de interpolare $g(x)$ şi de interpolat $f(x)$). Acestă condiție se scrie: $g'(x_i) = f'(x_i)$ şi /sau $g''(x_i) = f''(x_i)$. (6.1')

2. *aproximarea prin dezvoltarea în serii Fourier,* se utilizează atunci când funcția de interpolat *f(x)* îndeplineşte condițiile lui *Dirichlet:* este *periodică*, are un număr *finit de puncte de discontinuitate* şi *valori extreme finite*. Aproximarea prin dezvoltarea în serii *Fourier* mai este cunoscută sub numele de *descompunerea în armonice a funcției,* iar determinarea coeficienților funcțiilor de aproximare (armonice) se numeşte *analiză armonică.*
3. *aproximarea prin minimizarea abaterii maxime,* se utilizează atunci când funcția de interpolat *f(x)* şi funcția de interpolare *g(x)* nu au aceleaşi valori în nodurile rețelei.

   Se cunosc următoarele moduri de aproximare prin minimizare:

   - minimizarea abaterii maxime dintre valorile celor două funcții calculată pentru *orice punct* al intervalul considerat, adică:

   $$max\left|f(x)-g(x)\right| = min, \quad \forall x \in [a,\, b] \qquad (6.2)$$

   - minimizarea abaterii maxime dintre valorile celor două funcții calculate într-un *număr finit de puncte* al intervalul considerat, adică:

   $$max\left|f(x_i)-g(x_i)\right| = min, \quad i = 0 \div n \qquad (6.2')$$

4. *minimizarea sumei pătratelor abaterilor* sau *abaterii pătratice medii* dintre valorile celor două funcții, calculate într-un număr finit de puncte din intervalul considerat, atunci când funcția de interpolat *f(x)* şi funcția de interpolare *g(x)* nu au aceleaşi valori în nodurile rețelei. Abaterea se calculează conform relației:

   $$S = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - g(x_i)\right]^2 = min, \quad i = 0 \div n \qquad (6.3)$$

   Această metodă se mai numeşte *metoda celor mai mici pătrate.* Se observă din realția (6.3) că *abaterea pătratică medie* este nulă în cazul în care funcția de aproximare *g(x)* este un polinom de interpolare, adică: $y_i = g(x_i)$.

6.1. Metode numerice de interpolare polinomială

Metodele de interpolare polinomială aproximează o funcție discretă dată cu ajutorul unor funcții polinomiale. Presupunem că nodurile rețelei x_i sunt distincte şi ordonate în intervalul [*a, b*] astfel: $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n = b$. Valorile funcției *f(x)* în aceste noduri sunt: $y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_1),\ y_2=f(x_2),\ \ldots,\ y_n=f(x_n)$.

Fie o funcție polinomială *g(x)* care aproximează *f(x),* astfel încât se poate scrie relația:

$$f(x) = g(x) + r(x) \qquad (6.4)$$

în care: *g(x)* este o funcție de interpolare formată dintr-o combinație de funcții algebrice liniar independente $q_k(x)$:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k q_k(x) \qquad (6.5)$$

a_k , coeficienţi polinomiali necunoscuţi care se determină din condiţiile de interpolare iar *r(x)* reprezintă *o funcţie de corecţie* sau *o funcţie eroare*.

Cel mai simplu set de funcţii algebrice liniar independente $q_k(x)$ îl reprezintă funcţiile putere, sau şirul de monoame: $1, x, x^2, x^3, ..., x^{n-1}$. Folosind un astfel de set funcţii de interpolare se obţine polinomul de interpolare:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \tag{6.6}$$

Dacă se scriu condiţiile (6.1) pentru polinomul de interpolare *g(x)* dat de relaţia (6.6) se obţine un sistem liniar de ecuaţii având necunoscute coeficienţii a_k:

$$y_i = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_i^k, \qquad i = 1,2,3,..., n \tag{6.7}$$

care se scrie matriceal: $[B]\{A\} = \{Y\}$ (6.7')

Sistemul liniar de ecuaţii (6.7) are determinantul de tip *Vandermonde:*

$$det[B] = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & ... & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & ... & x_3^{n-1} \\ . & . & . & ... & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{6.8}$$

Deoarece nodurile reţelei x_i au fost definite ca puncte distincte, determinantul sistemului (6.8) este nenul şi deci sistemul este compatibil determinat şi are soluţie unică. Metoda determinării coeficienţior polinomiali a_k şi a polinomului de interpolare de forma (6.6) cu ajutorul sistemului de ecuaţii (6.7) este laborioasă, de aceea se preferă folosirea altor tipuri de polinoame de interpolare care sunt prezentate în continuare.

6.2. Interpolarea polinomială Lagrange

Polinoamele de interpolare *Lagrange L(x)* sunt combinaţii liniare de funcţii de interpolare *Lagrange* $L_k(x)$ având anumite forme particulare dar aceleaşi valori cu cele ale funcţiei de aproximat *f(x)* în nodurile reţelei x_i.

Fie funcţia *f(x)* definită pe intervalul [*a, b*] şi o reţea de *n+1* puncte x_i echidistante între ele situate la distanţa *h* (ele formează nodurile reţelei). Abscisele acestor puncte se scriu în funcţie de pasul *h* şi de numărul nodului *i* astfel:

$$x_0 = a; \quad x_1 = x_0 + h, \quad ..., \; x_i = x_0 + ih \; ..., \; x_n = x_0 + nh = b \tag{6.9}$$

Polinoamele de interpolare Lagrange sunt definite cu ajutorul funcţiilor de interpolare *Lagrange* $L_k(x)$ astfel:

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{i=0,\, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right) y_k \tag{6.10}$$

Ținând seama că punctele rețelei de noduri sunt echidistante relația generală (6.10) de definiție a polinoamelor de interpolare *Lagrange* devine:

$$L(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-x_0)(x-x_1)..(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})..(x-x_n)}{(kh)(k-1)h..(h)(-h)(-2h)..(-n+k)h}y_k \qquad (6.11)$$

sau efectuând unele calcule:

$$L(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{h^n k!(n-k)!(-1)^{n-k}}y_k \qquad (6.12)$$

Împărțind fiecare paranteză de la numărător cu h relația (6.12) devine:

$$L(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0-h}{h}\right)..\left(\frac{x-x_0-(k-1)h}{h}\right)\left(\frac{x-x_0-(k+1)h}{h}\right)..\left(\frac{x-x_0-nh}{h}\right)}{k!(n-k)!(-1)^{n-k}}y_k \qquad (6.12')$$

Dacă în relația (6.12') se face schimbarea de variabilă $q=\frac{x-x_0}{h}$ se obține:

$$L(x_0+qh)=\sum_{k=0}^{n}\frac{q(q-1)...(q-k+1)(q-k-1)...(q-n)}{k!(n-k)!(-1)^{n-k}}y_k \qquad (6.13)$$

Notând cu: $q^{[n+1]}=q(q-1)(q-2)...(q-n)$ relația (6.13) devine:

$$L(x_0+qh)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}q^{[n+1]}}{k!(n-k)!(q-k)}y_k \qquad (6.13')$$

Aplicația 6.1

Să se determine polinomul de interpolare în cazul funcției ce trece prin punctele: $A_1(-1, 1)$, $A_2(0, 2)$ și $A_3(4, 0)$ folosind atât funcții independente: *1, x,* x^2,... cât și funcțiile de interpolare *Lagrange* .

Rezolvare

a. Folosind funcțiile independente *1, x,* x^2 polinomul de interpolare se scrie:

$$g(x)=a_1+a_2x+a_3x^2 \qquad (6.14)$$

Condițiile (6.1) în acest caz devin:

$$\begin{cases}a_1-a_2+a_3=1\\a_1=2\\a_1+4a_2+16a_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=2\\a_2=0{,}7\\a_3=-0{,}3\end{cases} \qquad (6.15)$$

Rezultă următoarea expresie a polinomului de interpolare:

$$g(x)=2+0{,}7x-0{,}3x^2 \qquad (6.16)$$

b. Folosind funcțiile de interpolare *Lagrange* polinomul de interpolare este:

$$L(x)=\sum_{k=1}^{3} y_k L_k(x) = y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x) \tag{6.17}$$

unde funcțiile de interpolare Lagrange au expresiile:

$$L_1(x)=\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 1}}^{3}\frac{x-x_i}{x_1-x_i}=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{x-x_3}{x_1-x_3}=\frac{1}{5}x(x-4) \tag{6.18}$$

$$L_2(x)=\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{3}\frac{x-x_i}{x_2-x_i}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x-x_3}{x_2-x_3}=-\frac{1}{4}(x+1)(x-4) \tag{6.19}$$

$$L_3(x)=\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 3}}^{3}\frac{x-x_i}{x_3-x_i}=\frac{x-x_1}{x_3-x_2}\cdot\frac{x-x_2}{x_3-x_2}=\frac{1}{20}x(x+1) \tag{6.20}$$

Înlocuind expresiile găsite (6.18), (6.19) şi (6.20) în expresia (6.17) se obține *polinomul de interpolare Lagrange* al funcției ce trece prin cele trei puncte:

$$\begin{aligned} L(x) &= 1\cdot\frac{1}{5}x(x-4)+2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)(x+1)(x-4)+0\cdot\frac{1}{20}x(x+1) \\ L(x) &= 2+0{,}7x-0{,}3x^2 \end{aligned} \tag{6.21}$$

Relațiile obținute prin cele două metode sunt identice, deci polinomul de interpolare a unei funcției ce trece printr-un număr dat de puncte este unic (nu depinde de tipul funcțiilor polinomiale de interpolare folosite).

Aplicația 6.2

Se consideră următoarea problemă din Rezistența materialelor: un tronson de bară dreaptă având lungimea L şi rigiditatea la încovoiere constantă EI_y, supus la acțiunea unor sarcini exterioare care produc încovoiere simplă. Se cere polinomul de interpolare pentru funcția săgeții $w(x)$ şi rotirii $\theta(x)$ secțiunii situată la distanța x de capătul barei, cunoscând valorile săgeților şi rotirilor secțiunilor de capăt, respectiv w_1, θ_1 şi w_2, θ_2, din figura 6.2.

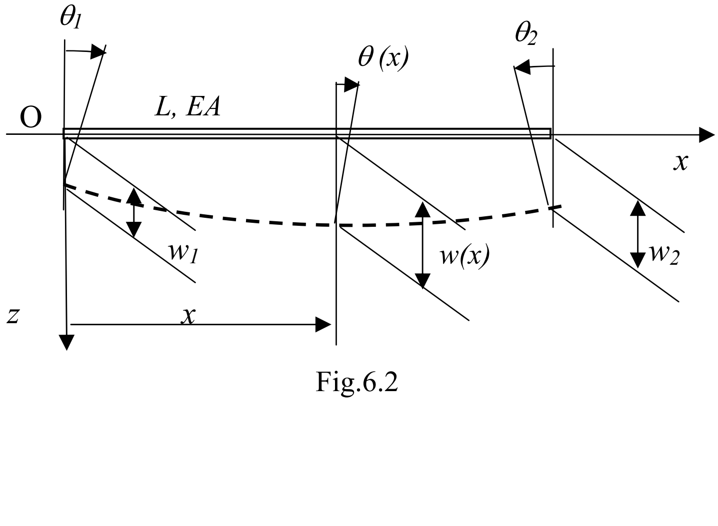


Fig.6.2

Rezolvare

Ecuaţia diferenţială a fibrei medii deformate pentru un tronson de bară supusă la încovoiere simplă având rigiditatea la încovoiere constantă EI_y, conform relaţiilor deduse la Rezistenţa materialelor, este de forma:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M_{iy}(x)}{EI_y} \tag{6.22}$$

în care: $M_{iy}(x)$ reprezintă momentul încovoietor din secţinea situată la distanţa x

Relaţia diferenţială dintre funcţia săgeţilor $w(x)$ şi cea a rotirilor $\theta(x)$ este:

$$\frac{dw}{dx} = \theta(x) \tag{6.23}$$

Conform relaţiilor (6.22) şi (6.23), în cazul în care momentul $M_{iy}(x)$ este o funcţie de gradul întâi (acest caz corespunde unei bare supusă acţiunii unor forţe şi cupluri concentrate) rotirea secţiunii $\theta(x)$ o funcţie de gradul al II lea iar săgeata $w(x)$ este o funcţie de gradul al III lea , conform relaţiilor (6.22) şi (6.23).

Cele două funcţii se pot aproxima folosind un polinom de interpolare construit cu setul de funcţii independente: $1,\ x,\ x^2$ şi x^3:

$$\begin{aligned} &w(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \\ &\theta(x) = \frac{dw}{dx} = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2 \end{aligned} \tag{6.24}$$

Coeficienţii polinomiali $a_1,\ a_2,\ a_3$ şi a_4 din relaţia (6.24) se determină din condiţiile privind săgeţile şi rotirile la capetele tronsonului astfel:

$$x = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} w(0) = w_1 \\ \theta(0) = \theta_1 \end{cases} \qquad x = L \;\Rightarrow \begin{cases} w(L) = w_2 \\ \theta(L) = \theta_2 \end{cases} \tag{6.25}$$

Înlocuind în expresiile (6.24) condiţiile la limită (6.25) se obţine:

$$\begin{cases} a_1 = w_1 \\ a_2 = \theta_1 \\ a_3L^2 + a_4L^3 = w_2 - w_1 - \theta_1 L \\ 2a_3L + 3a_4L^2 = \theta_2 - \theta_1 \end{cases} \tag{6.26}$$

Sistemul de ecuaţii (6.26) are soluţiile:

$$\begin{cases} a_1 = w_1 \\ a_2 = \theta_1 \\ a_3 = \dfrac{1}{L^2}\left(-3w_1 + 3w_2 - 2\theta_1 L - \theta_2 L\right) \\ a_4 = \dfrac{1}{L^3}\left(2w_1 - 2w_2 + \theta_1 L + \theta_2 L\right) \end{cases} \tag{6.27}$$

Înlocuind soluţiile (6.27) în relaţiile (6.24) se obţin polinoamele de interpolare a funcţiilor săgeţii *w(x)* şi rotirii *φ(x)* ale unei secţiuni oarecare situată la distanţa *x* de capătul barei:

$$w(x)=w_1+\theta_1 x+\frac{1}{L^2}\left(-3w_1+3w_2-2\theta_1 L-\theta_2 L\right)x^2+\frac{1}{L^3}\left(2w_1-2w_2+\theta_1 L+\theta_2 L\right)x^3$$
$$\theta(x)=\theta_1+\frac{2}{L^2}\left(-3w_1+3w_2-2\theta_1 L-\theta_2 L\right)x+\frac{3}{L^3}\left(2w_1-2w_2+\theta_1 L+\theta_2 L\right)x^2 \quad (6.28)$$

Expresiile funcţiilor săgeţii *w(x)* şi rotirii *φ(x)* se mai pot scrie sub forma:

$$w(x)=w_1 N_1(x)+\theta_1 N_2(x)+w_2 N_3(x)+\theta_2 N_4(x) \quad (6.29)$$

$$\theta(x)=w_1 N_1'(x)+\theta_1 N_2'(x)+w_2 N_3'(x)+\theta_2 N_4'(x) \quad (6.29')$$

unde funcţiile $N_1(x)$, $N_2(x)$ $N_3(x)$ şi $N_4(x)$ din expresia săgeţilor sunt numite *funcţi de formă* şi au expresiile:

$$N_1=\left(1-\frac{3}{L^2}x^2+\frac{2}{L^3}x^3\right); \qquad N_2=\left(x-\frac{2}{L}x^2+\frac{1}{L^2}x^3\right)$$
$$N_3=\left(\frac{3}{L^2}x^2-\frac{2}{L^3}x^3\right); \qquad N_4=\left(-\frac{1}{L}x^2+\frac{1}{L^2}x^3\right) \quad (6.30)$$

iar derivalele acestor funcţii de formă din expresia rotirilor au expresiile:

$$N_1'=\left(-\frac{6}{L^2}x+\frac{6}{L^3}x^2\right); \qquad N_2'=\left(1-\frac{4}{L}x+\frac{3}{L^2}x^2\right)$$
$$N_3'=\left(\frac{6}{L^2}x-\frac{6}{L^3}x^2\right); \qquad N_4'=\left(-\frac{2}{L}x+\frac{3}{L^2}x^2\right) \quad (6.30')$$

6.3. Interpolarea polinomială cu diferenţe finite

6.3.1. Formula de interpolare Newton cu diferenţe finite progresive

Prima formulă de interpolare *Newton cu diferenţe finite progresive* permite aproximarea unei funcţii *f(x)* cu ajutorul *diferenţele finite progresive* calculate într-un număr dat de puncte echidistante din interiorul intervalului de definiţie [*a, b*]. Această formulă permite de asemenea extrapolarea funcţiei în punctele aflate într-o vecinătate la stânga intervalului [*a, b*].

Fie funcţia *f(x)* o funcţie definită pe intervalul [*a, b*] şi o reţea de $n+1$ puncte echidistante, situate între ele la distanţa *h*. Abscisele acestor puncte se scriu în funcţie de pasul *h* şi de numărul nodului *i* astfel:

$$x_0=a; \quad x_1=x_0+h, \quad \ldots, \quad x_i=x_0+ih \quad \ldots, \quad x_n=x_0+nh=b \quad (6.31)$$

Dezvoltând în serie *Taylor* funcţia *f(x)* în jurul punctul x_0 se obţine:

$$f(x_0+qh)=f(x_0)+qhf'(x_0)+\frac{q^2h^2}{2}f''(x_0)+\frac{q^3h^3}{6}f'''(x_0)+\ldots \quad (6.32)$$

Ţinând seama de relaţia simbolică (5.10) între operatorii diferenţial D şi al diferenţelor finite progresive Δ: ($e^{hD} = 1 + \Delta$), dezvoltarea în serie (6.32) se poate scrie simbolic sub forma:

$$f(x_0 + qh) = \left(e^{qhD}\right) f(x_0) = (1 + \Delta)^q y_0 \qquad (6.32')$$

Dezvoltând paranteza din relaţia (6.32') după formula binomului lui Newton şi reţinând primii $n+1$ termeni ($q>n$), se obţine relaţia:

$$f(x_0 + qh) \cong \left[1 + q\Delta + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 + ... + \frac{q(q-1)(q-2)...(q-n+1)}{n!}\Delta^n\right] y_0 \qquad (6.33)$$

Se obţine *polinomul de interpolare Newton cu diferenţe progresive* sau *prima formulă de interpolare Gregory-Newton:*

$$\begin{aligned} P_n(x_0 + qh) = 1 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{6}\Delta^3 y_0 + ... + \\ + \frac{q(q-1)(q-2)...(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \end{aligned} \qquad (6.33')$$

Polinomul de interpolare *Newton cu diferenţe finite progresive* (6.33') se mai poate obţine folosind *polinomul de interpolare Newton $P_n(x)$* plecând din punctul x_0:

$$\begin{aligned} P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + \\ + a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}) \end{aligned} \qquad (6.34)$$

Coeficienţii $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ se determină din condiţiile de interpolare scrise pentru funcţia $P_n(x)$:

$$\begin{aligned} &P_n(x_0) = y_0; \\ &\Delta P_n(x_0) = \Delta y_0; \\ &\Delta^2 P_n(x_0) = \Delta^2 y_0; \\ &...................... \\ &\Delta^n P_n(x_0) = \Delta^n y_0 \end{aligned} \qquad (6.35)$$

- Astfel, din prima condiţie (6.35) rezultă coeficientul a_0:

$$P_n(x_0) = y_0 \quad \Rightarrow a_0 = y_0 \qquad (6.36)$$

Prima diferenţă progresivă polinomului $P_n(x)$ se scrie ţinând seama de faptul că punctele x_0, x_1, x_2,..., x_n sunt echidistante, situate la distanţa h:

$$\begin{aligned} \Delta P_n(x) = P_n(x+h) - P_n(x) = a_1 h + 2ha_2(x - x_0) + 3ha_3(x - x_0)(x - x_1) + ... + \\ + nha_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-2}) \end{aligned} \qquad (6.37)$$

- din a doua condiţie (6.35) rezultă coeficientul a_1:

$$\Delta P_n(x_0) = \Delta y_0 \qquad \Rightarrow a_1 = \frac{\Delta y_0}{1!\,h} \tag{6.38}$$

A doua diferenţă progresivă a polinomului $P_n(x)$ se calculează astfel:

$$\begin{aligned}&\Delta^2 P_n(x) = \Delta P_n(x+h) - \Delta P_n(x)\\&\Delta^2 P_n(x) = 2!\,h^2 a_2 + 2\cdot 3h^2 a_3(x-x_0) + \ldots + (n-1)nh^2 a_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-3})\end{aligned} \tag{6.39}$$

- din a treia condiţie (6.35) rezultă coeficientul a_2:

$$\Delta^2 P_n(x_0) = \Delta^2 y_0 \qquad \Rightarrow a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2} \tag{6.40}$$

- coeficientul a_n se determină în mod analog:

$$a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n} \tag{6.41}$$

Ţinând seama de expresiile (6.36), (6.38), (6.40) şi (6.41) ale coeficienţilor $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$, polinomul de interpolare Newton se scrie:

$$\begin{aligned}P_n(x) = y_0 &+ \frac{(x-x_0)}{1!\,h}\Delta y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!\,h^2}\Delta^2 y_0 + \ldots\\&+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{n!\,h^n}\Delta^n y_0\end{aligned} \tag{6.42}$$

Dacă în relaţia (6.42) se face schimbarea de variabilă $q = \frac{x-x_0}{h}$ se obţine *prima formulă de interpolare a lui Newton cu diferenţe finite progresive:*

$$\begin{aligned}P_n(x_0+qh) = y_0 &+ q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots\\&+ \frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0\end{aligned} \tag{6.43}$$

Aplicaţia 6.3

Folosind prima formulă de interpolare a lui Newton cu diferenţe finite progresive să se determine sumele puterilor primelor n numere naturale:

$$\begin{aligned}S_n^1 &= 1+2+3+4+\ldots+n\\S_n^2 &= 1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2\\S_n^3 &= 1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3\end{aligned} \tag{6.44}$$

Rezolvare

Folosind formula (6.43) se poate scrie o relaţie generală pentru calculul sumelor S_n (6.44) în funcţie de diferenţele finite progresive calculate în x_0 astfel:

$$S_n(x_0+qh)=S_0+q\Delta S_0+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 S_0+\frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 S_0+..$$
$$+\frac{q(q-1)(q-2)...(q-n+1)}{n!}\Delta^n S_0 \qquad (6.45)$$

Dacă se înlocuiesc în relația (6.45) valorile:

$$x_0=1;\ x_n=n;\ h=1;\ \ q=\frac{x-x_0}{h}=n \qquad (6.46)$$

se obține relația generală pentru calculul sumelor (6.44):

$$S_n=1+(n-1)\Delta S_0+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}\Delta^2 S_0+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!}\Delta^3 S_0+...$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)...\,2\cdot 1}{n!}\Delta^n S_0; \qquad (6.47)$$

Se particularizează relația (6.47) pentru fiecare sumă, obținându-se:

- Pentru prima sumă $S_n^1=1+2+3+4+...+n$ diferențele progresive corespunzătoare sunt calculate în tabelul 6.1

Tabelul 6.1

Nr. crt	*n*	S_n	ΔS	$\Delta^2 S$	$\Delta^3 S$
0	1	1	2	1	0
1	2	3	3	1	
2	3	6	4		
3	4	10			

Înlocuind aceste valori în relația (6.47) se obține formula cunoscută::

$$S_n^1=1+(n-1)\cdot 2+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot 1=\frac{n(n+1)}{2} \qquad (6.48)$$

- Pentru a doua sumă $S_n^2=1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2$ diferențele progresive corespunzătoare sunt calculate în tabelul 6.2

Tabelul 6.2

Nr. crt.	*n*	S_n	ΔS	$\Delta^2 S$	$\Delta^3 S$	$\Delta^4 S$
0	1	1	4	5	2	0
1	2	5	9	7	2	
2	3	14	16	9		
3	4	30	25			
4	5	55				

Înlocuind aceste valori în relația (6.47) se obține:

$$S_n^2=1+(n-1)\cdot 4+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot 5+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}\cdot 2$$

$$S_n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (6.49)$$

- Pentru a treia sumă $S_n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3$ diferențele progresive corespunzătoare sunt calculate în tabelul 6.3

Tabelul 6.3

Nr.crt.	n	S_n	ΔS	$\Delta^2 S$	$\Delta^3 S$	$\Delta^4 S$	$\Delta^5 S$
0	1	1	8	19	18	6	0
1	2	9	27	37	24	6	
2	3	36	64	61	30		
3	4	100	125	91			
4	5	225	216				
5	6	441					

Înlocuind aceste valori în relația (6.47) se obține formula cunoscută:

$$S_n^3 = 1 + (n-1)\cdot 8 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot 19 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}\cdot 18 + \\ + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}\cdot 6 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (6.50)$$

În acest mod se pot obține formulele pentru calculul sumei puterilor k ($k>3$) ale primelor n numere naturale:

$$S_n^k = 1^k + 2^k + 3^k + 4^k + ... + n^k$$

Aplicația 6.4

Să se deducă polinomul de interpolare Newton cu diferențe progresive pentru funcția $y = e^{x^2}$ definită într-un număr de șase puncte echidistante ale intervalului [$1,5;\ 2$] corespunuzătoare unui pas $h=0,1$.

Rezolvare

Diferențele progresive calculate sunt date în tabelul 6.4

Tabelul 6.4

Nr. crt.	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	1,5	9,48733	3,44809	1,6094	0,87352	0,53548	0,36337
1	1,6	12,93582	5,05749	2,48292	1,409	0,89885	
2	1,7	17,99331	7,54041	3,89192	2,30785		
3	1,8	25,53372	11,43233	6,19977			
4	1,9	36,96605	17,6321				
5	2,0	54,59815					

Reținând primii șase termeni din formula (6.33) se obține polinomul de interpolare a lui Newton de gradul cinci:

$$P_5(x_0 + qh) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \\ + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(q-4)}{5!}\Delta^5 y_0 \quad (6.51)$$

Înlocuind valorile particulare $x_0 = 1{,}5;\ h = 0{,}1$ şi $q = \frac{x-1{,}5}{0{,}1} = 10x - 15$ în relaţia (6.51) şi diferenţele finite calculate în tabelul 6.4 se obţine:

$$\begin{aligned} P(x) &= 9{,}48773 + 3{,}44809\ (10x-15) + \frac{1{,}6094}{2}(10x-15)(10x-14) + \\ &+ \frac{0{,}87352}{6}(10x-15)(10x-14)(10x-13) + \\ &+ \frac{0{,}53548}{24}(10x-15)(10x-14)(10x-13)(10x-12) + \\ &+ \frac{0{,}36337}{120}(10x-15)(10x-14)(10x-13)(10x-12)(10x-11) \end{aligned} \tag{6.52}$$

Polinomul de interpolare (6.52) foloseşte diferenţele progresive calculate în punctul $x_0=1,5$ şi poate fi folosit pentru extrapolarea funcţiei date pentru $x<1,5$, adică pentru puncte situate într-o vecinătate a lui $x_0=1,5$, la stânga intervalului .

6.3.2. Formula de interpolare Newton cu diferenţe finite regresive

A doua formulă de interpolare *Newton* cu diferenţe regresive permite aproximarea unei funcţii *f(x)* folosind *diferenţele finite regresive* ale funcţiei calculate într-un număr finit de puncte echidistante din interiorul intervalului de definiţie [*a, b*]. Această formulă permite de asemenea extrapolarea funcţiei în punctele aflate într-o vecinătate la dreapta intervalului [*a, b*].

Fie funcţia *f(x)* o funcţie definită pe intervalul [*a, b*] şi o reţea de $n+1$ puncte echidistante, situate la distanţa *h* între ele. Abscisele acestor puncte se scriu în funcţie de pasul *h* şi de numărul nodului *i* astfel:

$$x_0 = a;\quad x_1 = x_0 + h\ ,\quad \ldots,\ x_i = x_0 + ih\ \ \ldots,\ \ x_n = x_0 + nh = b \tag{6.53}$$

Dezvoltând în serie *Taylor* funcţia *f(x)* în jurul punctului $x_n=b$ se obţine:

$$f(x_n - qh) = f(x_n) - qhf'(x_n) + \frac{q^2h^2}{2}f''(x_n) - \frac{q^3h^3}{3!}f'''(x_n) + \ldots \tag{6.54}$$

Ţinând seama de relaţia simbolică între operatorul diferenţial *D* şi operatorul diferenţei regresive ∇ ($e^{-hD} = 1-\nabla$) dezvoltarea (6.54) se scrie:

$$f(x_n - qh) = \left(e^{-qhD}\right)f(x_n) = \left(e^{-hD}\right)^q y_n = (1-\nabla)^q y_n \tag{6.55}$$

Ca şi în cazul primei formule de interpolare *Newton,* se dezvoltă binomul lui *Newton* $(1-\nabla)^q$ şi se reţin primii $n+1$ termeni. Se obţine *polinomul de interpolare Newton cu diferenţe regresive* sau *a doua formulă de interpolare Newton cu diferenţe regresive:*

$$P_n(x_n - qh) = 1 - q\Delta y_n + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_n - \frac{q(q-1)(q-2)}{6}\Delta^3 y_n + \ldots$$
$$+ (-1)^n \cdot \frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_n \quad (6.56)$$

A doua formulă de interpolare *Newton* cu diferențe regresive se mai poate obține cu ajutorul *polinomului Newton de gradul n* începând cu punctul x_n:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots$$
$$\ldots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_0) \quad (6.57)$$

Coeficienții $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ se determină din condițiile de interpolare:

$$\begin{aligned} &P_n(x_n) = y_n; \\ &\nabla P_n(x_0) = \nabla y_n; \\ &\nabla^2 P_n(x_0) = \nabla^2 y_n; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\nabla^n P_n(x_0) = \nabla^n y_n \end{aligned} \quad (6.58)$$

1. Coeficientul a_0 se determină astfel:

$$P_n(x_n) = y_n \quad \Rightarrow a_0 = y_n \quad (6.59)$$

Prima diferență regresivă a polinomului $P_n(x)$ se calculează astfel:

$$\nabla P_n(x) = P_n(x) - P_n(x - h) = a_1 h + 2ha_2(x - x_n) +$$
$$+ 3ha_3(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots + nha_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_2) \quad (6.60)$$

2. Coeficientul a_1 se determină astfel:

$$\nabla P_n(x_n) = \nabla y_n \quad \Rightarrow a_1 = \frac{\nabla y_n}{1!h} \quad (6.61)$$

A doua diferență regresivă a polinomului $P_n(x)$ se calculează astfel:

$$\nabla^2 P_n(x) = \nabla P_n(x) - \nabla P_n(x - h)$$
$$\nabla^2 P_n(x) = 2!h^2 a_2 + 2 \cdot 3h^2 a_3(x - x_n) + \ldots \quad (6.62)$$
$$+ (n-1)nh^2 a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_3)$$

3. Coeficientul a_2 se determină astfel:

$$\nabla^2 P_n(x_n) = \nabla^2 y_n \quad \Rightarrow a_2 = \frac{\nabla^2 y_n}{2!h^2} \quad (6.63)$$

....

4. Coeficientul a_n se determină astfel:

$$\nabla^n P_n(x_n) = \nabla^n y_n \quad \Rightarrow a_n = \frac{\nabla^n y_n}{n!h^2} \quad (6.64)$$

Deci polinomul de interpolare (6.57) se scrie:

$$P_n(x)=y_n+\frac{(x-x_n)}{1!\,h}\nabla y_n+\frac{(x-x_n)(x-x_{n-1})}{2!\,h^2}\nabla^2 y_n+\ldots$$
$$+\frac{(x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_1)}{n!\,h^n}\nabla^n y_n \qquad (6.65)$$

Făcând în relația (6.65) schimbarea de variabilă $q=\frac{x_n-x}{h}$ se obține a aceeaşi formulă de interpolare Newton cu diferențe regresive (6.56):

$$P_n(x_n-qh)=y_n-q\nabla y_n+\frac{q(q-1)}{2!}\nabla^2 y_n+\ldots$$
$$+(-1)^n\frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-n+1)}{n!}\nabla^n y_n \qquad (6.66)$$

Aplicația 6.5

Să se deducă polinomul de interpolare a lui Newton cu diferențe regresive pentru valorile funcției $y=e^{x^2}$ într-un număr de cinci puncte echidistante ale intervalului $[1,5;\ 2]$ corespunzătoare unui pas $h=0,1$.

Rezolvare

Diferențele regresive sunt date în tabelul 6.5

Tabelul 6.5

Nr. crt.	*x*	*y*	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$	$\nabla^5 y$
0	1,5	9,48733					
1	1,6	12,93582	3,44809				
2	1,7	17,99331	5,05749	1,6094			
3	1,8	25,53372	7,54041	2,48292	0,87352		
4	1,9	36,96605	11,43233	3,89192	1,409	0,53548	
5	2,0	54,59815	17,6321	6,19977	2,30785	0,89885	0,36337

Reținând primii şase termeni în formula (6.66) se obține:

$$P_5(x_n-qh)=y_n-q\nabla y_n+\frac{q(q-1)}{2!}\nabla^2 y_n-\frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\nabla^3 y_n+$$
$$+\frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\nabla^4 y_n-\frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(q-4)}{5!}\nabla^5 y_n \qquad (6.67)$$

Înlocuind în relația (6.67)

$$x_n=2;\ \ h=0,1 \ \text{ respectiv } \ q=\frac{2-x}{0,1}=20-10x$$

şi diferențele finite regresive corespunzătoare calculate în tabelul 6.5, se obține polinomul de interpolare a lui Newton cu diferențe regresive:

$$\begin{aligned} P(x) = {} & 54{,}59815 - 17{,}6321(20-10x) + \frac{6{,}19977}{2}(20-10x)(19-10x) - \\ & - \frac{2{,}30785}{6}(20-10x)(19-10x)(18-10x) + \\ & + \frac{0{,}89885}{24}(20-10x)(19-10x)(18-10x)(17-10x) - \\ & - \frac{0{,}36337}{120}(20-10x)(19-10x)(18-10x)(17-10x)(16-10x) \end{aligned} \tag{6.68}$$

Polinomul de interpolare (6.68) foloseşte diferenţele regresive calculate în punctul $x_n=2$ şi poate fi folosit pentru extrapolarea funcţiei date pentru $x>2$, adică pentru puncte situate într-o vecinătate a lui $x_n=2$, la dreapta intervalului.

6.3.3. Formula de interpolare Stirling cu diferenţe centrale

Formula de interpolare *Stirling* cu diferenţe centrale permite aproximarea unei funcţii *f(x)* folosind *diferenţele finite centrale* ale funcţiei calculate într-un număr finit de puncte echidistante din interiorul intervalului de definiţie [*a, b*]. Fie funcţia *f(x)* o funcţie definită pe intervalul [*a, b*] şi o reţea de $n+1$ puncte echidistante între ele, situate la distanţa *h* (nodurile reţelei x_i). Abscisele acestor puncte se scriu în funcţie de pasul *h* şi de numărul nodului *i* astfel:

$$x_0 = a; \quad x_1 = x_0 + h, \quad \ldots, \; x_i = x_0 + ih \; \ldots, \; x_n = x_0 + nh = b \tag{6.69}$$

Se dezvoltă în serie Taylor funcţia *f(c+ qh)* în jurul punctului *c* situat în interiorul intervalului de definiţie [*a, b*]:

$$f(c+qh) = f(c) + qhf'(c) + \frac{q^2h^2}{2}f''(c) + \frac{q^3h^3}{6}f'''(c) + \ldots \tag{6.70}$$

Relaţia (6.70) se poate scrie simbolic astfel:

$$f(c+qh) = \left[1 + qhD + \frac{q^2}{2}h^2D^2 + \frac{q^3}{6}h^3D^3 + \frac{q^4}{24}h^4D^4 + \ldots\right]f(c) \tag{6.71}$$

Dacă în relaţia (6.71) se înlocuiesc expresiile simbolice ale operatorilor diferenţiali D, D^2, D^3, ... în funcţie de diferenţele finite centrale conform relaţiilor (5.42), (5.46) ... (5.50) în care se reţin doar primii doi termeni, iar din realţia (6.71) se reţin primii *2k* termeni, se obţine *formula de interpolare Stirling cu diferenţe centrale:*

$$\begin{aligned} P_n(c+qh) = {} & 1 + q\,\mu\delta\, y_c + \frac{q^2}{2}\delta^2 y_c + \frac{q(q^2-1)}{3!}\mu\delta^3 y_c + \frac{q^2(q^2-1)}{4!}\delta^4 y_c + \\ & + \frac{q(q^2-1)(q^2-4)}{5!}\mu\delta^5 y_c + \frac{q^2(q^2-1)(q^2-4)}{6!}\mu\delta^6 y_c + \ldots \\ & + \frac{q(q^2-1)(q^2-4)\ldots(q^2-(k-1)^2)}{(2k-1)!}\mu\delta^{2k-1} y_c + \frac{q^2(q^2-1)(q^2-4)\ldots(q^2-(k-1)^2)}{(2k)!}\delta^{2k} y_c \end{aligned} \tag{6.72}$$

Aplicația 6.6

Să se deducă polinomul de interpolare Stirling cu diferențe centrale pentru valorile funcției $y = e^{x^2}$ într-un număr de şapte puncte echidistante ale intervalului $[1,4;\ 2]$ corespunzătoare unui pas $h=0,1$, în jurul punctului $c=1,7$.

Rezolvare

Diferențele centrale pare şi centrale medii impare în jurul punctului $x=1,7$ se calculează cu ajutorul relațiilor :

$$\mu\delta y_i = \frac{1}{2}(y_{i+1} - y_{i-1}); \qquad \delta^2 y_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} \qquad (6.73)$$

Rezultatele sunt date în tabelul 6.6

Tabelul 6.6

i	x	y	$\mu\delta y$	$\delta^2 y$	$\mu\delta^3 y$	$\delta^4 y$	$\mu\delta^5 y$	$\delta^6 y$
1	1,4	7,09933						
2	1,5	9,48733	2,918245	1,06049				
3	1,6	12,93582	4,25299	1,609	0,711215	0,32541		
4	1,7	17,99331	6,29895	2,48292	1,14146	0,53508	0,28672	0,15410
5	1,8	25,53372	9,48637	3,89192	1,858425	0,89885		
6	1,9	36,96605	14,5322	6,19977				
7	2,0	54,59815						

Folosind diferențele finite centrale în jurul punctului c calculate în tabelul 6.6 şi formula de interpolare *Stirling* cu diferențe centrale (6.72) din care se rețin primii şapte termeni se obține:

$$\begin{aligned} P(c+qh) &= 1 + q\mu\delta y_c + \frac{q^2}{2}\delta^2 y_c + \frac{q(q^2-1)}{6}\mu\delta^3 y_c + \frac{q^2(q^2-1)}{24}\delta^4 y_c + \\ &+ \frac{q(q^2-1)(q^2-4)}{120}\mu\delta^5 y_c + \frac{q^2(q^2-1)(q^2-4)}{120}\delta^6 y_c \end{aligned} \qquad (6.74)$$

Astfel pentru $c=1,7$ făcând schimbarea de variabilă $x=c+qh$:

$$q = \frac{x-c}{h} = \frac{x-1,7}{0,1}; \qquad q = 10x - 17 \qquad (6.75)$$

înlocuind ân (6.74) se obține polinomul de interpolare:

$$\begin{aligned} P(x) &= 1 + (10x-17)\cdot 6,29895 + \frac{(10x-17)^2}{2}\cdot 2,48292 + \\ &+ \frac{(10x-17)\left[(10x-17)^2-1\right]}{6}\cdot 1,14146 + \frac{(10x-17)^2\left[(10x-17)^2-1\right]}{24}\cdot 0,53508 + \\ &+ \frac{(10x-17)\left[(10x-17)^2-1\right]\left[(10x-17)^2-4\right]}{120}\cdot 0,28672 + \\ &+ \frac{(10x-17)^2\left[(10x-17)^2-1\right]\left[(10x-17)^2-4\right]}{720}\cdot 0,1541 \end{aligned} \qquad (6.76)$$

6.4. Interpolarea polinomială Newton cu diferențe divizate

Se consideră o rețea de divizare x_i a intervalului [*a, b*]. Se cunosc valorile funcției y_i în aceste noduri. Se definesc următoarele diferențe divizate:

- diferențe divizate de ordinul I :

$$\Delta D(x_2, x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{6.77}$$

- diferențe divizate de ordinul II :

$$\Delta D(x_3, x_2, x_1) = \frac{\Delta D(x_3, x_2) - \Delta D(x_2, x_1)}{x_3 - x_1} \tag{6.78}$$

- diferențe divizate de ordinul III:

$$\Delta D(x_4, x_3, x_2, x_1) = \frac{\Delta D(x_4, x_3, x_2) - \Delta D(x_3, x_2, x_1)}{x_4 - x_1} \tag{6.79}$$

- diferențe divizate de ordinul IV:

$$\Delta D(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1) = \frac{\Delta D(x_5, x_4, x_3, x_2) - \Delta D(x_4, x_3, x_2, x_1)}{x_5 - x_1} \tag{6.80}$$

....

- diferențe divizate de ordinul *(n-1):*

$$\Delta D(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1) = \frac{\Delta D(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2) - \Delta D(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_2, x_1)}{x_n - x_1} \tag{6.81}$$

Diferențe divizate de ordinul *(n-1)* folosesc *n* puncte de diviziune.

Se poate demonstra prin inducție matematică că diferențele divizate de ordinul *(n-1)* mai pot fi calculate cu ajutorul formulei:

$$\Delta D(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\prod\limits_{j=1,\ i \neq j,\ i > j}^{n} (x_i - x_j)} \tag{6.82}$$

Se observă că relația (6.82) este simetrică, adică valoarea diferenței divizate nu depinde de ordinea punctelor de diviziune. Pentru uşurința calculelor, se recomandă ca diferențele divizate să se calculeze cu ajutorul relațiilor (6.81) şi nu cu (6.82). Diferențele divizate se folosesc pentru aproximarea funcțiilor cu ajutorul polinoamelor *Newton.*

Fie *f(x)* o funcție care se aproximează cu ajutorul polinoamelor lui *Newton* cu diferențe divizate $P_{n-1}(x)$. Această funcție se poate scrie astfel:

$$f(x) = P_{n-1}(x) + r_n(x) \tag{6.83}$$

unde: P_{n-1} este un *polinomul Newton cu diferențe divizate* de gradul *n-1*

r_n este o *funcție rest de aproximare* de gradul *n*.

Pentru a deduce forma polinomului de interpolare *Newton* $P_{n-1}(x)$ se consideră pe rând un număr de puncte de diviziune a intervalului [*a, b*] egal cu:*2, 3,4, ..., n+1* .

- din relația diferențelor divizate de ordinul I (6.77), considerând două puncte de diviziune (x, x_1), rezultă o funcție de interpolare de gradul I:

$$g_1(x) = y_1 + (x - x_1)\Delta D(x, x_1) \tag{6.84}$$

- din relația diferențelor divizate de ordinul II (6.78), considerând trei puncte de diviziune (x, x_1, x_2), rezultă o funcție de interpolare de gradul II:

$$g_2(x) = y_1 + (x - x_1)\Delta D(x_2, x_1) + (x - x_1)(x - x_2)\Delta D(x, x_1, x_2) \tag{6.85}$$

- din relația diferențelor divizate de ordinul III (6.79), considerând patru puncte de diviziune (x, x_1, x_2, x_3) rezultă o funcție de interpolare de gradul III:

$$\begin{aligned} g_3(x) = {} & y_1 + (x - x_1)\Delta D(x_2, x_1) + (x - x_1)(x - x_2)\Delta D(x_3, x_2, x_1) + \\ & + (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\Delta D(x, x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \tag{6.86}$$

- din relația diferențelor divizate de ordinul IV (6.80), considerând patru puncte de diviziune (x, x_1, x_2, x_3) rezultă o funcție de interpolare de gradul IV:

$$\begin{aligned} g_4(x) = {} & y_1 + (x - x_1)\Delta D(x_2, x_1) + (x - x_1)(x - x_2)\Delta D(x_3, x_2, x_1) + \\ & + (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\Delta D(x, x_1, x_2, x_3) + \\ & + (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)\Delta D(x, x_1, x_2, x_3, x_4). \end{aligned} \tag{6.87}$$

....

- Din relația diferențelor divizate de ordinul *n* (6.81) se obține relația de interpolare a funcției $y=f(x)$ considerând $n+1$ puncte de diviziune $(x, x_1, x_2,..., x_n)$ cu o funcție de interpolare de gradul *n*:

$$\begin{aligned} g_n(x) = {} & y_1 + (x - x_1)\Delta D(x_2, x_1) + (x - x_1)(x - x_2)\Delta D(x_3, x_2, x_1) + \\ & + (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\Delta D(x_4, x_3, x_2, x_1) + \dots + \\ & + (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_{n-1})\Delta D(x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1) + \\ & + (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n)\Delta D(x, x_n, \dots, x_2, x_1) \end{aligned} \tag{6.88}$$

Relația (6.88) se poate demonstra şi prin inducție matematică.

Dacă se notează ultimul termen al relației (6.88) cu $r_n(x)$:

$$r_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n)\Delta D(x, x_n, \dots, x_2, x_1) \tag{6.89}$$

acesta reprezintă *funcția rest de aproximare* din relația (6.82),

Neglijând în relația (6.88) funcția de aproximare $r_n(x)$ dată de relația (6.89) se obține pentru *f(x) polinomul de interpolare Newton cu diferențe divizate de grad n-1* corespunzător celor *n* puncte de divizare ale intervalului [*a,b*]:

$$\begin{aligned} P_{n-1}(x) = {} & y_1 + (x - x_1)\Delta D(x_2, x_1) + (x - x_1)(x - x_2)\Delta D(x_3, x_2, x_1) + \\ & + (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\Delta D(x_4, x_3, x_2, x_1) + \dots + \\ & + (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_{n-1})\Delta D(x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1) \end{aligned} \tag{6.90}$$

O proprietate importantă a polinomului de interpolare *Newton* cu diferenţe divizate este aceea că nu depinde de ordinea punctelor de divizare şi nici de punctul de start, aşa cum rezultă din aplicaţia 6.6.

Aplicaţia 6.7

Folosind *polinomul de interpolare Newton cu diferenţe divizate* (6.90) să se deducă expresia care aproximează funcţia definită prin punctele:

$A_1(1, 2), A_2(2, 3), A_3(3, 0), A_4(4, 6)$ şi $A_5(5, 4)$.

Rezolvare

Se notează diferenţele divizate ale funcţiei *f(x)* de ordinul I, II, III şi IV corespunzătoare celor cinci puncte de diviziune ale intervalului [1, 5], definite de relaţiile (6.77) ... (6.80) cu: $\Delta D_1, \Delta D_2, \Delta D_3$ *şi* ΔD_4 .

Valorile calculate ale acestor diferenţe sunt date în tabelul 6.7

Tabelul 6.7

x_i	y_i	ΔD_1	ΔD_2	ΔD_3	ΔD_4
1	2	1	-2	13/6	-7/6
2	3	-3	9/2	-15/6	
3	0	6	-4		
4	6	-2			
5	4				
5	4	-2	-4	-15/6	-7/6
4	6	6	9/2	13/6	
3	0	-3	-2		
2	3	1			
1	2				

Se poate demonstra că polinomul de interpolare *Newton* cu diferenţe divizate $P_4(x)$, are aceeaşi expresie indiferent de ordinea punctelor de diviziune.

Astfel, particularizând relaţia (6.90) pentru $n=4$ se obţin rezultatele:

- pentru ordinea: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, conform rezultatelor obţinute pentru diferenţele divizate în tabelul 6.7, se obţine polinomul de interpolare *Newton* cu diferenţe divizate:

$$\begin{aligned} P_4(x) = {} & 2+(x-1)\cdot 1+(x-1)(x-2)(-2)+(x-1)(x-2)(x-3)\cdot 13/6+ \\ & +(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\cdot(-7/6) \end{aligned} \tag{6.91}$$

- pentru ordinea punctelor: x_5, x_4, x_3, x_2, x_1 conform rezultatelor obţinute pentru diferenţele divizate în tabelul 6.7 , se obţine polinomul de interpolare *Newton* cu diferenţe divizate:

$$\begin{aligned} P_4(x) = {} & 4+(x-4)\cdot(-2)+(x-4)(x-3)(-4)+(x-4)(x-3)(x-2)\cdot(-15/6)+ \\ & +(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)\cdot(-7/6) \end{aligned} \tag{6.92}$$

6.5. Aproximarea prin serii Fourier

Pentru aproximarea funcțiilor periodice care satisfac condițiile *Dirichlet* se folosesc dezvoltările în serii Fourier sau descompunerea lor în armonice.

Fie o funcție periodică *f(t)* de perioadă *T*, definită pe intervalul [*0, T*] care satisface condițiile *Dirichlet*, adică este o funcție uniform mărginită, are cel mult un număr finit de puncte de discontinuitate de speța întâi şi un număr finit de puncte de maxim şi minim. O astfel de funcție se poate dezvolta în serie *Fourier* conform relației:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right) \tag{6.94}$$

în care coeficienții seriei *Fourier* a_0, a_k şi b_k se calculează cu ajutorul formulelor:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt; \\ a_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)cos(k\omega t)dt; \\ b_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)sin(k\omega t)dt. \end{aligned} \tag{6.95}$$

Se întâlnesc următoarele două cazuri pentru valoarea perioadei *T* a funcției periodice *f(t):*

$$a.\ T = 2\pi \text{, în acest caz: } \omega = \frac{2\pi}{T} = 1; \tag{6.96}$$

$$b.\ T = \pi \text{, în acest caz: } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2. \tag{6.97}$$

Dacă funcția periodică *f(x)* este definită domeniul [*a, b*], atunci făcând schimbarea de variabilă:

$$\begin{aligned} t &= T\frac{x-a}{b-a} \qquad \Rightarrow dt = \frac{Tdx}{b-a} \\ x &= a \Rightarrow t = 0; \qquad x = b \Rightarrow t = T \end{aligned} \tag{6.98}$$

se obține funcția periodică *f(t)* având domeniul de definiție [*0, T*].

Observații

- Dacă funcția periodică *f(t)* definită pe intervalul [$-\pi, \pi$] este *impară* atunci conform relațiilor (6.95) coeficienții a_k sunt nuli;
- Dacă funcția periodică *f(t)* definită pe intervalul [$-\pi, \pi$] este *pară* atunci conform aceloraşi relații, coeficienții b_k sunt nuli.

Aplicația 6.8

Să se aproximeze prin serii *Fourier* funcția periodică *impară* de perioadă $T=2\pi$, definită astfel (fig. 6.3):

$$f(t)=\begin{cases}1 & pentru\ t\in(0,\ \pi)\\ -1 & pentru\ t\in(\pi,\ 2\pi)\end{cases} \qquad (6.99)$$

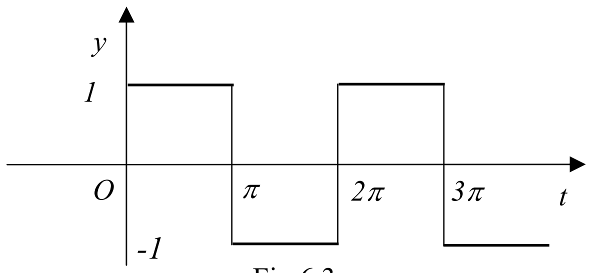


Fig.6.3

Coeficienții *Fourier* se calculează conform relațiilor (6.95):

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)dt=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi}f(t)dt+\int_{\pi}^{2\pi}f(t)dt\right]=0$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos kt\,dt=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\cos kt\,dt-\int_{\pi}^{2\pi}\cos kt\,dt\right]=0 \qquad (6.100)$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin kt\,dt=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\sin kt\,dt-\int_{\pi}^{2\pi}\sin kt\,dt\right]=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^k}{k}$$

Deoarece k este un număr natural, coeficienții b_k se mai scriu:

$$b_k=\begin{cases}0 & pentru\ \ k=2n\\ \dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{(2n-1)} & pentru\ \ k=2n-1\end{cases} \qquad (6.101)$$

Dezvoltarea în serie Fourier a funcției definite prin relația (6.99) se scrie:

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin t}{1}+\frac{\sin 3t}{3}+\frac{\sin 5t}{5}+\ldots\right) \qquad (6.102)$$

Pentru $t=\pi/2$ valoarea funcției este $f(\pi/2)=1$ iar din relația (6.102) rezultă:

$$1=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin(\pi/2)}{1}+\frac{\sin 3(\pi/2)}{3}+\frac{\sin 5(\pi/2)}{5}+\ldots\right) \qquad (6.103)$$

adică se obține suma seriei următoare:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots=\frac{\pi}{4} \qquad (6.104)$$

Aplicația 6.9

Să se aproximeze cu ajutorul seriilor Fourier funcția periodică pară de perioadă $T=2\pi$ definită astfel (fig.6.4):

$$f(t)=\begin{cases} t & pentru\ t\in(0,\ \pi) \\ 2\pi-t & pentru\ t\in(\pi,\ 2\pi) \end{cases} \tag{6.105}$$

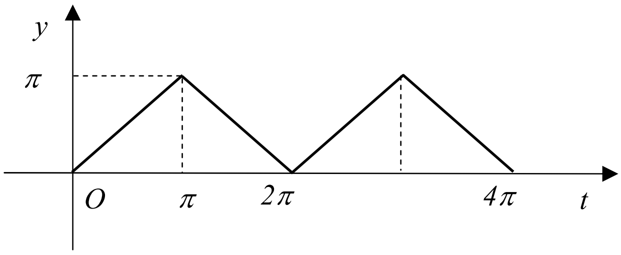


Fig.6.4

Coeficienții *Fourier* se calculează conform relațiilor (6.95):

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)dt=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi}t\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi-t)dt\right]=\frac{\pi}{2}$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)cos\,kt\,dt=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}t\,cos\,kt\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi-t)cos\,kt\,dt\right]=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^k}{k^2} \tag{6.106}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)sin\,kt\,dt=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}t\,sin\,kt\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi-t)sin\,kt\,dt\right]=0$$

Deoarece k este un număr natural, coeficienții a_k se mai scriu:

$$a_k=\begin{cases} 0 & pentru\ \ k=2n \\ \dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{(2n-1)^2} & pentru\ \ k=2n-1 \end{cases} \tag{6.107}$$

Dezvoltarea în serie Fourier a funcției periodice (6.105) se scrie:

$$f(t)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{cos\,t}{1}+\frac{cos\,3t}{3^2}+\frac{cos\,5t}{5^2}+...\right) \tag{6.108}$$

Deoarece $f(0)=0$, relația (6.108) pentru $t=0$ devine :

$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+...\right) \tag{6.109}$$

Rezultă suma seriei:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+...=\frac{\pi^2}{8} \tag{6.110}$$

Aplicația 6.10

Să se aproximeze cu ajutorul seriilor *Fourier* funcția periodică *impară* de perioadă $T=2\pi$ definită astfel (fig.6.5):

$$f(t)=\begin{cases} t & pentru\ t\in(0,\ \pi) \\ t-2\pi & pentru\ t\in(\pi,\ 2\pi) \end{cases} \tag{6.111}$$

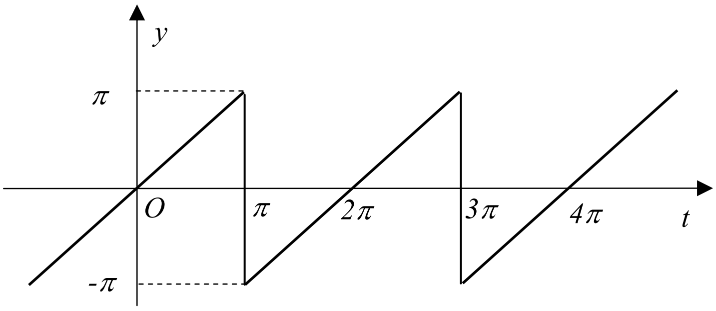


Fig.6.5

Coeficienții *Fourier* se calculează conform relațiilor (6.95):

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} t\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}(t-2\pi)dt\right]=0$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} t\cos kt\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}(t-2\pi)\cos kt\,dt\right]=0 \tag{6.112}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\,dt=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} t\sin kt\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}(t-2\pi)\sin kt\,dt\right]=\frac{2(-1)^{k+1}}{k}$$

Deoarece k este un număr natural, coeficienții b_k se mai scriu:

$$b_k=\begin{cases} -\dfrac{2}{2n} & pentru\ \ k=2n \\ \dfrac{2}{2n-1} & pentru\ \ k=2n-1 \end{cases} \tag{6.113}$$

Dezvoltarea în serie Fourier a funcției (6.111) se scrie:

$$f(t)=2\left(\frac{\sin t}{1}-\frac{\sin 2t}{2}+\frac{\sin 3t}{3}-\frac{\sin 4t}{4}+\frac{\sin 5t}{5}-...\right) \tag{6.114}$$

Pentru $t=\pi/2$ valoarea funcției este $f(\pi/2)=\pi/2$ iar relația (6.114) devine:

$$\frac{\pi}{2}=2\left(\frac{\sin(\pi/2)}{1}-\frac{\sin 2(\pi/2)}{2}+\frac{\sin 3(\pi/2)}{3}-\frac{\sin 4(\pi/2)}{4}+...\right) \tag{6.115}$$

Rezultă suma seriei:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-...=\frac{\pi}{4} \tag{6.116}$$

Aplicația 6.11

Să se aproximeze cu ajutorul seriilor *Fourier* funcția periodică *pară* de perioadă $T=2\pi$ definită astfel (fig.6.6):

$$f(t)=\begin{cases} -t+\pi/2 & \textit{pentru } t\in(0,\ \ \pi/2) \\ 0 & \textit{pentru } t\in(\pi/2,\ 3\pi/2) \\ t-3\pi/2 & \textit{pentru } t\in(3\pi/2,\ 2\pi) \end{cases} \tag{6.117}$$

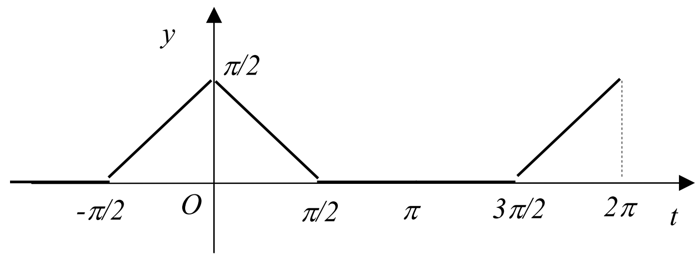


Fig.6.6

Coeficienții *Fourier* se calculează conform relațiilor (6.95):

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)dt=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\left(-t+\frac{\pi}{2}\right)dt+\int_{3\pi/2}^{2\pi}\left(t-3\frac{\pi}{2}\right)dt\right]=\frac{\pi}{8}$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos kt\,dt=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\left(-t+\frac{\pi}{2}\right)\cos kt\cdot dt+\int_{3\pi/2}^{2\pi}\left(t-3\frac{\pi}{2}\right)\cos kt\cdot dt\right] \tag{6.118}$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-\cos\frac{k\pi}{2}}{k^2};\qquad b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin kt\,dt=0$$

Deoarece k este un număr natural, coeficienții b_k se mai scriu:

$$b_k=\begin{cases} 0 & \textit{pentru } k=4n \\ \frac{2}{\pi}\frac{1}{(2n)^2} & \textit{pentru } k=2n \\ \frac{2}{\pi}\frac{1}{(2n-1)^2} & \textit{pentru } k=2n-1 \end{cases} \tag{6.119}$$

Dezvoltarea în serie Fourier a funcției (6.117) se scrie:

$$f(t)=\frac{\pi}{8}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos t}{1^2}+\frac{\cos 2t}{2^2}+\frac{\cos 3t}{3^2}+\frac{\cos 5t}{4^2}+\frac{\cos 5t}{5^2}...\right) \tag{6.120}$$

Deoarece $f(0)=\pi/2$ din relația (6.120) rezultă suma seriei :

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+...=\frac{3\pi^2}{16} \tag{6.121}$$

Aplicația 6.12

Să se aproximeze cu ajutorul seriilor *Fourier* funcția periodică *impară* de perioadă $T=2\pi$ definită astfel (fig.6.7):

$$f(t)=\begin{cases} t & pentru\ t\in(0,\ \pi/2) \\ -t+\pi & pentru\ t\in(\pi/2,\ 3\pi/2) \\ t-2\pi & pentru\ t\in(3\pi/2,\ 2\pi) \end{cases} \tag{6.122}$$

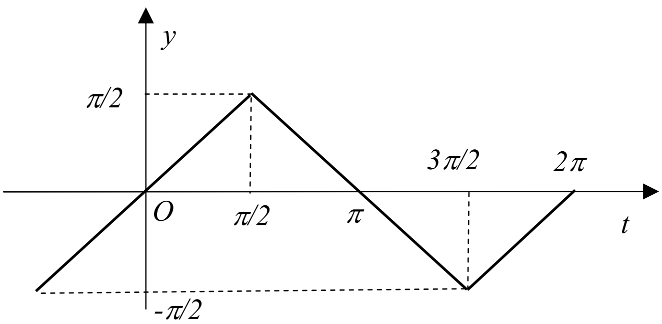


Fig. 6.7

Coeficienții *Fourier* se calculează conform relațiilor (6.95):

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt=0;\qquad a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)cosktdt=0$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} tsinktdt+\int_{\pi/2}^{3\pi/2}(-t+\pi)sinktdt+\int_{3\pi/2}^{2\pi}(t-2\pi)sinktdt\right]=\frac{4}{\pi}\frac{sin\frac{k\pi}{2}}{k^2} \tag{6.123}$$

Deoarece k este un număr natural, coeficienții b_k se mai scriu:

$$b_k=\begin{cases} 0 & pentru\ \ k=2n \\ \frac{4}{\pi}\frac{-1}{(4n-1)^2} & pentru\ \ k=4n-1 \\ \frac{4}{\pi}\frac{1}{(4n+1)^2} & pentru\ \ k=4n+1 \end{cases} \tag{6.124}$$

Dezvoltarea în serie Fourier a funcției (6.124) se scrie:

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{sin\,t}{1^2}-\frac{sin\,3t}{3^2}+\frac{sin\,5t}{5^2}-\frac{sin\,7t}{7^2}+...\right) \tag{6.125}$$

Deoarece $f(\pi/2)=\pi/2$ din relația (6.125) se obține suma seriei:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+...=\frac{\pi^2}{8} \tag{6.126}$$

Aplicația 6.13

Să se aproximeze cu ajutorul seriilor *Fourier* funcția periodică *pară* de perioadă $T=\pi$ definită astfel (fig.6.8):

$$f(t)=|\sin t|, \quad pentru\ t\in[0,\pi] \tag{6.127}$$

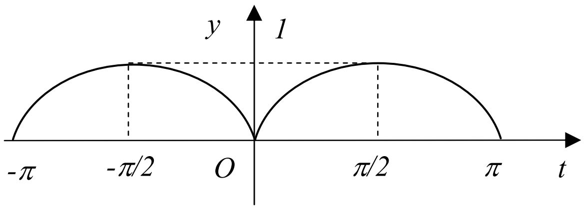


Fig.6.8

Coeficienții *Fourier* se calculează conform relațiilor (6.95):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)dt=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\sin t\,dt\right]=\frac{2}{\pi}$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\cos 2kt\,dt=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\sin t\cdot\cos 2kt\,dt\right]=-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \tag{6.128}$$

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\sin 2kt\,dt=0$$

Dezvoltarea în serie Fourier a funcției (6.128) se scrie:

$$f(t)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2t}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4t}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6t}{5\cdot 7}+...\right) \tag{6.129}$$

Deoarece $f(0)=0$ din relația (6.129) rezultă suma seriei :

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...=\frac{1}{2} \tag{6.131}$$

Deoarece $f(\pi/2)=0$ din relația (6.129) rezultă suma seriei:

$$\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}-\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 11}-...=\frac{\pi-2}{4} \tag{6.132}$$

Aplicația 6.14

Să se aproximeze cu ajutorul seriilor Fourier funcția periodică pară de perioadă $T=\pi$ definită astfel (fig.6.9):

$$f(t)=|\cos t|, \quad pentru\ t\in[0,\pi] \tag{6.133}$$

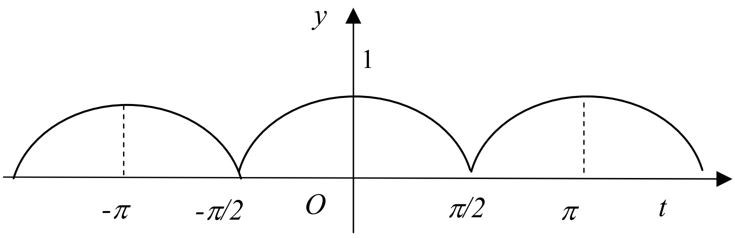


Fig.6.9

Coeficienții *Fourier* se calculează conform relațiilor (6.95):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} \cos t\,dt - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos t\,dt\right] = \frac{2}{\pi}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos 2kt\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} \cos t\cdot\cos 2kt\,dt - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos t\cdot\cos 2kt\,dt\right] \quad (6.134)$$

$$a_k = -\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}; \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\,dt = 0$$

Dezvoltarea în serie Fourier a funcției (6.133) se scrie:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2t}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4t}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6t}{5\cdot 7} + \ldots\right) \quad (6.135)$$

Se observă că se obține aceeași dezvoltare ca în cazul funcției (6.127):

$$f(t) = |\sin t|, \quad \text{pentru } t \in [0, \pi]$$

Aplicația 6.15

Să se aproximeze cu ajutorul seriilor Fourier funcția periodică impară de perioadă $T=2\pi$ definită astfel (fig.6.10):

$$f(t) = e^{-at}, \quad \text{pentru } t \in [0, \pi] \quad (6.136)$$

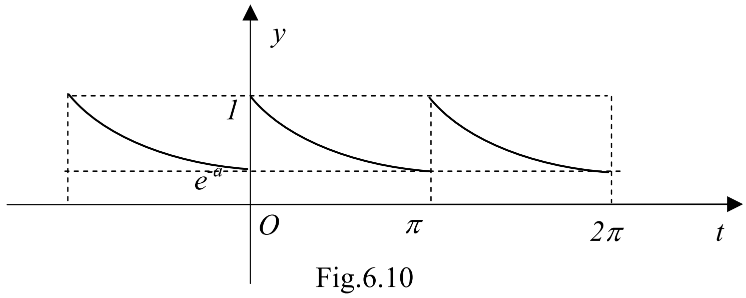


Fig.6.10

Coeficienții *Fourier* se calculează conform relațiilor (6.95):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} e^{-at}\,dt\right] = \frac{1-e^{-a\pi}}{a\pi}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos 2kt\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi} e^{-at}\cos 2kt\,dt\right] \qquad (6.137)$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin 2kt\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi} e^{-at}\sin 2kt\,dt\right]$$

Se introduc numerele complexe:

$$a_k - ib_k = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi} e^{-at}(\cos 2kt - i\sin 2kt)dt\right] = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi} e^{-(a+2ki)t}\,dt\right] = \frac{2}{\pi}\frac{1-e^{-(a+2ki)\pi}}{a+2ki}$$

$$\Rightarrow a_k - ib_k = \frac{2}{\pi}\frac{a-2ki}{a^2+4k^2}\left(1-e^{-a\pi}\right) \qquad (6.138)$$

Folosind acest rezultat se obține:

$$a_k = \frac{2a}{\pi}\frac{\left(1-e^{-a\pi}\right)}{a^2+4k^2}, \qquad b_k = \frac{4k}{\pi}\frac{\left(1-e^{-a\pi}\right)}{a^2+4k^2} \qquad (6.139)$$

Deci dezvoltarea în serie Fourier a funcției (6.136) se scrie:

$$f(t) = \frac{1-e^{-a\pi}}{\pi}\left(\frac{1}{a} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a\cos 2kt + 2k\sin 2kt}{a^2+4k^2}\right) \qquad (6.140)$$

6.6. Aproximarea funcțiilor prin regresii. Metoda celor mai mici pătrate

Fie $f: [a, b] \rightarrow R$ o funcție discretă definită într-un număr finit de puncte ale intervalului de definiție x_i, $i=1, 2, 3,.., n$ şi y_i valorile corespunzătoare ale acestei funcții. Se caută o funcție de aproximare $g(x)$, numită *funcție de regresie,* care să aproximeze funcția dată prin minimizarea expresiei:

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - g(x_i)\right]^2, \qquad i = 1 \div n \qquad (6.141)$$

în care: $g(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k g_k(x)$; $k=1, 2, ...m$ (6.142)

este o funcție polinomială de aproximare

a_k reprezintă coeficienții regresiei

$g_k(x)$ - un set de funcții liniar independente.

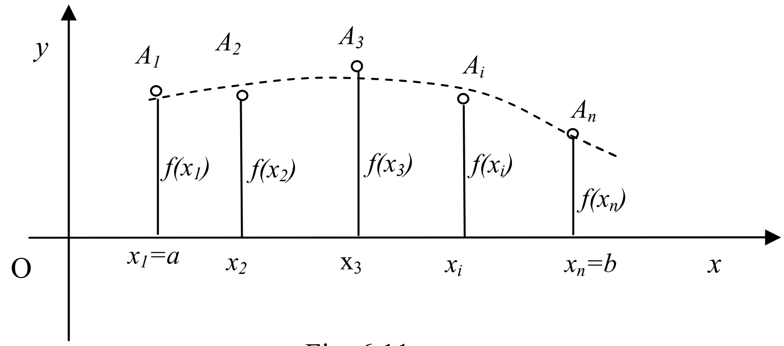


Fig. 6.11

În cadrul acestei metode de aproximare nu este necesar ca funcția *g(x)* să interpoleze valorile funcției date prin puntele de definiție ale ei $A_i(x_i, y_i)$, fiind suficientă minimizarea expresiei (6.141), care se exprimă prin anularea derivatelor parțiale ale lui *S* în raport cu coeficienții regresiei a_k. Se obțin relațiile:

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = \frac{\partial}{\partial a_k}\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \sum_{k=1}^{m} a_k g(x_i)\right]^2 = 0 \quad ; k = 1, 2, 3, ..., m \qquad (6.143)$$

Relațiile (6.143) reprezintă un sistem de *m* ecuații cu necunoscutele a_k.

În cazul paticular în care funcțiile $g_k(x)$ sunt un set de funcții independente de forma: $g_k(x)=x^{k-1}$, $k=1, 2, ...m$, atunci relațiile (6.143) capătă forma particulară:

$$\frac{\partial}{\partial a_k}\left(\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - a_1 - a_2 x_i - a_3 x_i^2 - ... - a_m x_i^{m-1}\right]^2\right) = 0 \qquad (6.144)$$
$$k = 1, 2, 3, ..., m$$

Relațiile (6.144) sunt echivalente cu sistemul:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a_1 - a_2 x_i - a_3 x_i^2 - ... - a_m x_i^{m-1}\right)x_i^{k-1} = 0 \qquad (6.145)$$

şi se mai scrie sub forma: $k = 1,2,3,...,m$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k-1}\right)a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k}\right)a_2 + ... + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k+m-2}\right)a_m = \sum_{i=1}^{n} x_i^{k-1} y_i \qquad (6.146)$$

Particularizând relația (6.146) pentru diferite valori ale lui *m* se obține:

- pentru *m=1* se foloseşte $g_1(x)=1$ şi aproximarea se face cu o dreaptă paralelă cu axa *Ox*, care este *media valorilor funcției:*

$$g(x) = a_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (6.147)$$

Coeficientul regresiei a_1 se calculează conform relației (6.144):

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = \frac{\partial}{\partial a_1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - a_1\right]^2\right) = 2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - a_1\right] = 0 \;\Rightarrow\; a_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (6.148)$$

- pentru $m=2$ se foloseşte setul de funcţii $g_1(x)=1$, $g_2(x)=x$, şi aproximarea se face printr-o *dreptă de regresie*:

$$g(x) = a_1 + a_2 x \tag{6.149}$$

în care coeficienţii a_1 şi a_2 se obţin din sistemul (6.146) care are forma particulară:

$$\begin{cases} na_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i\, x_i \end{cases} \tag{6.150}$$

Parametrul regresiei (6.149), numit şi *coeficient de corelaţie,* are expresia:

$$a_C = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\right) - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right]}} \tag{6.151}$$

Aproximarea unei funcţii printr-o dreaptă de regresie este bună dacă valoarea coeficientului de corelaţie are o valoare apropiată de $a_C=1$.

- pentru $m=3$ se foloseşte setul de funcţii: $g_1(x)=1$, $g_2(x)=x$ şi $g_3(x)=x^2$ iar aproximarea se face printr-o *parabolă de regresie* având ecuaţia:

$$g(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 \tag{6.152}$$

în care coeficienţii regresiei a_1, a_2 şi a_3 se obţin din sistemul (6.146), care are forma particulară:

$$\begin{cases} na_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a_2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a_3 = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a_2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) a_3 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) a_2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right) a_3 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 \end{cases} \tag{6.153}$$

- pentru $m=4$ se obţine setul de funcţii: $g_1(x)=1$, $g_2(x)=x$, $g_3(x)=x^2$ şi $g_4(x)=x^4$ iar aproximarea se face printr-o *cubică de regresie* având ecuaţia:

$$g(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \tag{6.154}$$

în care coeficienţii regresiei a_1 , a_2 şi a_3 se obţin din sistemul (6.3.4), care are în acest caz forma particulară:

$$\begin{cases} na_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)a_2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)a_3 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)a_4 = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)a_2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)a_3 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right)a_4 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)a_2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right)a_3 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^5\right)a_4 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right)a_2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^5\right)a_3 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^6\right)a_4 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^3 \end{cases} \quad (6.155)$$

Pentru aproximarea prin funcţii de regresie având gradul 4, 5, ... rezultă un sistem de ecuaţii liniare care se se obţine prin adăugarea unei noi linii şi a unei noi coloane la ultimul sistem obţinut.

Aplicaţia 6.16

Să se determine *dreapta* şi *parabola de regresie* care aproximează valorile funcţiei care trece prin punctele $A_1(1, -1)$, $A_2(2, 0)$, $A_3(3, 3)$, $A_4(4, 3)$ şi $A_5(5, 4)$.

Rezolvare

- *Dreapta de regresie* se află cu ajutorul relaţiei (6.149), unde cei doi coeficienţi a_1 şi a_2 se obţin din sistemul de ecuaţii (6.150) care se scrie:

$$\begin{cases} 5a_1 + 15a_2 = 10 \\ 15a_1 + 55a_2 = 45 \end{cases} \quad (6.156)$$

Rezolvând acest sistem se obţin coeficienţii regresiei:

$$a_1 = -2{,}5; \quad a_2 = 1{,}5 \quad (6.157)$$

Dreapta de regresie se scire: $g(x) = 1{,}5x - 2{,}5$ (6.158)

Valoarea abaterii medii pătratice (6.141) este în acest caz: S=1,5 (6.159)

- *Parabola de regresie* se află cu ajutorul relaţiei (6.152), unde cei trei coeficienţi a_1 , a_2 şi a_3 se obţin din sistemul de ecuaţii (6.153) care se scrie:

$$\begin{cases} 5a_1 + 15a_2 + 55a_3 = 10 \\ 15a_1 + 55a_2 + 225a_3 = 45 \\ 55a_1 + 225a_2 + 979a_3 = 199 \end{cases} \quad (6.160)$$

Rezolvând sistemul de ecuaţii se obţin coeficienţii regresiei:

$$a_1 = -\frac{685}{218}; \quad a_2 = \frac{447}{218}; \; a_3 = -\frac{20}{218}; \quad (6.161)$$

Parabola de regresie este:

$$g(x) = -\frac{1}{218}\left(685 - 447x + 20x^2\right) \quad (6.162)$$

Valorile funcţiei de interpolat, ale parabolei de regresie şi diferenţele corespunzătoare în punctele de definiţie ale funcţiei sunt date în tabelul 6.8.

Tabelul 6.8

x	yi	f(x)	y_i-f(x)
1	-1	-1.18349	0.183486
2	0	0.591743	-0.59174
3	3	2.183486	0.816514
4	3	3.591743	-0.59174
5	5	4.816514	0.183486
		S	1.434349

Valoarea abaterii medii pǎratice pentru parabola de regresie calculată conform relaţiei (6.141) este: S=1,434349. Se observă că abaterea medie păratică este mai mică decât în cazul dreptei de regresie.

6.7. Interpolarea cu funcţii spline

Fie o funcţie f : $[a, b] \rightarrow$ R o funcţie continuă şi derivabilă de clasa C^1 definită discret. Se pune problema cât de exact se poate aproxima această funcţie.

Folosind *teorema lui Faber,* se obţin erori din ce în ce mai mari în ceea ce priveşte aproximarea funcţiei când numărul de puncte de interpolare este foarte mare ($n\rightarrow\infty$) sau când gradul polinomului de interpolare creşte foarte mult. Dacă se micşorează lungimea subintervalelor fără a creşte foarte mult gradul polinomului de interpolare, atunci rezultatul ar fi mai bun. Se obţine deci un rezultat bun dacă se micşorează lungimea subintervalelor şi se folosesc polinoame de interpolare având acelaşi grad pentru fiecare din aceste subintervale ale intervalului $[a, b]$.

O funcţie continuă şi derivabilă de clasa C^1 se poate aproxima printr-o succesiune de polinoame de interpolare având gradul minim doi, toate aceste polinoame având acelaşi grad pentru fiecare subinterval al intervalului $[a, b]$. Această categorie de funcţii poartă numele de *funcţii spline.*

Fie f: $[a, b] \rightarrow R$ o funcţie definită pe intervalul $[a, b]$. Se consideră o reţea de noduri din acest interval, notată cu x_i , $i= 0, 1, 2, 3, ..., n$ care împarte intervalul $[a, b]$ în n subintervale $[x_i, x_{i+1}]$. Se cunosc valorile discrete y_i ale funcţiei în nodurile x_i şi x_{i+1}. Funcţia s: $[a, b] \rightarrow$ R se numeşte *funcţie spline de ordin r* dacă îndeplineşte următoarele două condiţii:

a. expresia funcţiei $s(x)$ pe subintervalul $[x_i, x_{i+1}]$ este un polinom de gradul $r \geq 1$;

b. funcţia $s(x)$ este derivabilă de r-1 ori, deci $s \in C^{(r-1)}[a, b]$.

6.7.1. Funcţia spline de gradul I

Funcţia spline $s(x)$ de gradul I este de forma:

$$s(x) = ax + b \tag{6.163}$$

Pentru fiecare subinterval $[x_i,\ x_{i+1}]$ coeficienţii polinomiali a şi b se determină din condiţiile:

$$\begin{cases} s_i(x_i) = y_i = ax_i + b \\ s_i(x_{i+1}) = y_{i+1} = ax_{i+1} + b \end{cases} \tag{6.164}$$

Înlocuind se obţine:

$$a = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}; \quad b = y_i - a\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \tag{6.165}$$

Rezultă expresia *funcţiei spline de gradul I:*

$$s_i(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) \tag{6.166}$$

În aplicaţiile inginereşti, *funcţia spline de ordinul I* se foloseşte mai puţin decât cele de gradul II şi III.

6.7.2. Funcţia spline de gradul II

Funcţiile spline de gradul II sunt polinoame care pe intervalul $[x_i,\ x_{i+1}]$ au forma:

$$s_i(x) = y_i + m_i(x - x_i) + a_i(x - x_i)^2 \tag{6.167}$$

Pentru fiecare subinterval $[x_i,\ x_{i+1}]$ se observă că funcţia dată sub forma (6.167) satisface condiţiile :

$$\begin{cases} s_i(x_i) = y_i \\ s_i'(x_i) = m_i \end{cases} \tag{6.168}$$

Coeficientul polinomial a_i se determină din condiţia:

$$s_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \tag{6.169}$$

care este echivalent cu: $y_{i+1} = y_i + m_i(x_{i+1} - x_i) + a_i(x_{i+1} - x_i)^2$ (6.170)

Se obţine: $a_i = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_i^2} - \dfrac{m_i}{h_i}$ (6.171)

Înlocuind coeficientul polinomial a_i în expresia (6.167) se obţine *funcţia spline de gradul II* :

$$s_i(x) = y_i + m_i(x - x_i) + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i^2} - \frac{m_i}{h_i}\right)(x - x_i)^2 \tag{6.172}$$

În acesată expresie coeficientul m_{i+1} este necunoscut.

Se scrie funcţia *spline de gradul II* (6.172) pentru subintervalul $[x_{i+1},\ x_{i+2}]$:

$$s_{i+1}(x) = y_{i+1} + m_{i+1}(x - x_{i+1}) + \left(\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}^2} - \frac{m_{i+1}}{h_{i+1}}\right)(x - x_{i+1})^2 \tag{6.173}$$

Punând condiția ca în nodul x_{i+1} funcțiile $s_i(x)$ şi $s_{i+1}(x)$ să aibă aceeaşi pantă (adică derivatele de ordinul I egale), se obține:

$$s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1}) \tag{6.174}$$

în care:

$$s_i'(x) = m_i + 2\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i^2}\right)(x - x_i)$$

$$s_{i+1}'(x) = m_{i+1} + 2\left(\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}^2}\right)(x - x_{i+1}) \tag{6.175}$$

se obțin următoarele relații între pantele m_i şi m_{i+1}:

$$m_{i+1} = 2\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - m_i, \quad i = 1 \div n - 1 \tag{6.176}$$

Observație

Relațiile (6.176) între pantele m_i şi m_{i+1} din nodurile rețelei reprezintă $n-1$ ecuații cu n necunoscute. Pentru a rezolva acest sistem este necesară o condiție suplimentară, de exemplu: o valoare pentru m_1 sau m_n, o relație între două pante m_i şi m_j etc.

6.7.3. Funcții spline de gradul III

Funcțiile spline de gradul III sunt polinoame care pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ au forma:

$$s_i(x) = y_i + m_i(x - x_i) + a_i(x - x_i)^2 + b_i(x - x_i)^3 \tag{6.177}$$

Pentru fiecare subinterval $[x_i, x_{i+1}]$ se observă că funcția dată sub forma (6.167) satisface condițiile :

$$\begin{cases} s_i(x_i) = y_i \\ s_i'(x_i) = m_i \end{cases} \tag{6.178}$$

Coeficienții a_i şi b_i din (6.177) se determină din condițiile de continuitate a funcției spline de gradul III şi a derivatei ei în punctul x_{i+1}:

$$\begin{cases} s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1}) \\ s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1}) \end{cases} \tag{6.179}$$

în care:

$$s_{i+1}(x) = y_{i+1} + m_{i+1}(x - x_{i+1}) + a_{i+1}(x - x_{i+1})^2 + b_{i+1}(x - x_{i+1})^3 \tag{6.180}$$

Derivatele lor au expresia:

$$\begin{aligned} s_i'(x) &= m_i + 2a_i(x - x_i) + 3b_i(x - x_i)^2 \\ s_{i+1}'(x) &= m_{i+1} + 2a_{i+1}(x - x_{i+1}) + 3b_{i+1}(x - x_{i+1})^2 \end{aligned} \tag{6.181}$$

Înlocuind în relațiile (6.179) rezultă sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} y_i + m_i h_i + a_i h_i^2 + b_i h_i^3 = y_{i+1} \\ \quad m_i + 2a_i h_i + 3b_i h_i^2 = m_{i+1} \end{cases} \tag{6.182}$$

Rezolvând acest sistem rezultă coeficienții a_i şi b_i:

$$\begin{aligned} a_i &= 3\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i^2} - \frac{m_{i+1} + 2m_i}{h_i} \\ b_i &= -2\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i^3} + \frac{m_{i+1} + m_i}{h_i^2} \end{aligned} \tag{6.183}$$

Ținând seama de expresiile obținute pentru a_i şi b_i, *funcția spline de ordinul III* se scrie:

$$\begin{aligned} s_i(x) = y_i + m_i(x - x_i) &+ \left(3\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i^2} - \frac{m_{i+1} + 2m_i}{h_i}\right)(x - x_i)^2 + \\ &+ \left(-2\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i^3} - \frac{m_{i+1} + m_i}{h_i^2}\right)(x - x_i)^3 \end{aligned} \tag{6.184}$$

În expresia (6.184) pantele necunoscute m_i şi m_{i+1} se determină din condiția ca în nodul x_{i+1} funcțiile s_i şi s_{i+1} să aibă şi derivatele de ordinul II egale:

$$s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1}) \tag{6.185}$$

în care:

$$\begin{aligned} s_i''(x) &= 2a_i + 6b_i(x - x_i) \\ s_{i+1}''(x) &= 2a_{i+1} + 6b_{i+1}(x - x_{i+1}) \end{aligned} \tag{6.186}$$

Conform relației (6.183) coeficienții a_{i+1} şi b_{i+1} au expresiile:

$$\begin{aligned} a_{i+1} &= 3\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}^2} - \frac{m_{i+2} + 2m_{i+1}}{h_{i+1}}; \\ b_{i+1} &= -2\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}^3} + \frac{m_{i+2} + m_{i+1}}{h_{i+1}^2} \end{aligned} \tag{6.187}$$

Înlocuind în condiția (6.185) se obține următoarele relații între pantele m_i , m_{i+1} şi m_{i+2}:

$$h_{i+1} \cdot m_i + 2(h_i + h_{i+1})m_{i+1} + h_i m_{i+2} = 3\left(h_i \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} + h_{i+1}\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}\right) \tag{6.188}$$

$i = 1,2, \ldots, (n-2)$

Împărțind relația (6.188) cu $(h_{i+1} + h_i)$ şi făcând notațiile:

$$\rho_{i+1} = \frac{h_{i+1}}{h_{i+1}+h_i};$$

$$d_{i+1} = \frac{3}{h_{i+1}+h_i}\left(h_i \frac{y_{i+2}-y_{i+1}}{h_{i+1}} + h_{i+1}\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}\right) \tag{6.189}$$

$$\lambda_{i+1} = \frac{h_i}{h_{i+1}+h_i}, \qquad i = 1,2,\ ...,\ (n-2)$$

relațiile (6.188) între pantele m_i , m_{i+1} şi m_{i+2} se scriu:

$$\rho_{i+1} m_i + 2m_{i+1} + \lambda_{i+1} m_{i+2} = d_{i+1} \qquad i = 1,2,3,...,\ (n-2) \tag{6.190}$$

Relațiile (6.190) între pantele m_i , m_{i+1} şi m_{i+2} reprezintă *n-2* ecuații cu *n* necunoscute. Pentru a rezolva acest sistem sunt necesare două condiții suplimentare, de exemplu: valorile pantelor m_1 şi m_n sau două relații între două perechi pante .

Aplicația 6.17

Să se găsească funcțiile spline de gradul II care aproximează funcția dată prin punctele $A_1(0,\ 1)$, $A_2(2,\ 2)$, $A_3(3,\ 0)$ dacă în $x_1=0$ are panta $m_1=1$ (fig.6.12).

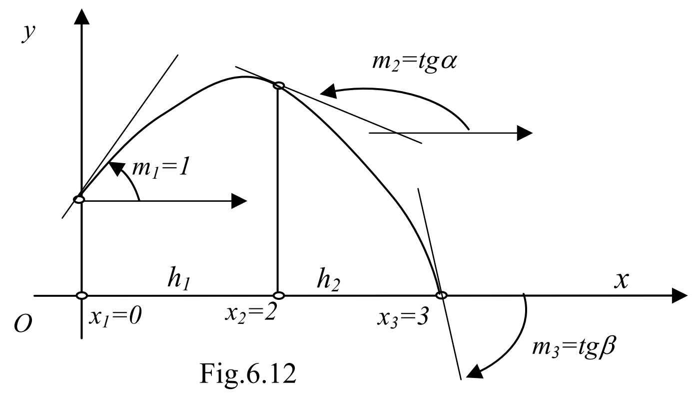


Fig.6.12

Rezolvare

Cele două subintervale h_1 , h_2 şi valorile pantelor m_2 şi m_3 sunt :

$$h_1 = 2; \quad h_2 = 1;$$
$$m_1 = 1$$
$$m_2 = 2\frac{y_2 - y_1}{2} - m_1 = 0 \tag{6.191}$$
$$m_3 = 2\frac{y_3 - y_2}{1} - m_2 = -4$$

Rezultă următoarele expresii ale funcțiilor spline de gradul II:

$$\begin{cases} s_1(x) = 1 + x - \dfrac{x^2}{4} \\ s_2(x) = 2 - 2(x-2)^2 \end{cases} \tag{6.192}$$

Derivatele funcţiilor () se scriu:

$$\begin{cases} s_1'(x) = 1 - \dfrac{x}{2} \\ s_2'(x) = -4(x-2) \end{cases} \tag{6.193}$$

Se observă că funcţiile spline (6.192) satisfac condiţiile de continuitate la limita celor două subintervale ($x=2$):

$$s_1(2) = s_2(2) = 2; \quad s_1'(2) = s_2'(2) = 0 \tag{6.194}$$

Aplicaţia 6.18

Să se definească funcţiile spline cubice care aproximează funcţia care trece prin punctele $A_1(0, 1)$, $A_2(2, 2)$, $A_3(3, 0)$ şi are pantele $m_1=1$ şi $m_3=0$ (fig.6.13).

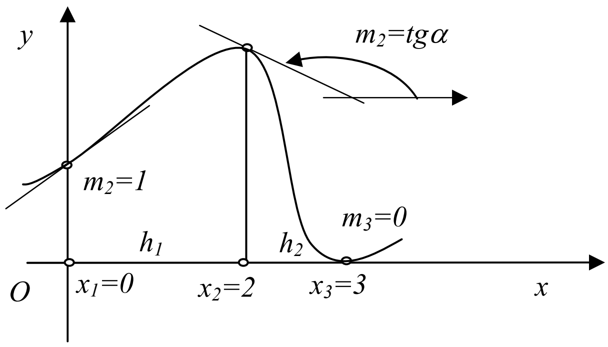


Fig.6.13

Rezolvare

Cele două subintervale h_1, h_2 şi valorile parametrilor ρ_2, λ_2 şi d_2 sunt :

$$\begin{aligned} &h_1 = 2; \quad h_2 = 1; \qquad \rho_2 = \frac{h_2}{h_1 + h_2} = \frac{1}{3}; \\ &\lambda_2 = \frac{h_1}{h_1 + h_2} = \frac{2}{3}; \qquad d_2 = -3{,}5. \end{aligned} \tag{6.195}$$

Se obţine sistemul de ecuaţii şi respectiv soluţiile:

$$\begin{cases} m_1 = 1 \\ \dfrac{1}{3} m_1 + 2m_2 + \dfrac{2}{3} m_3 = 3{,}5 \\ m_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = -\dfrac{23}{12} \\ m_3 = 0 \end{cases} \tag{6.196}$$

Funcțiile spline cubice pentru cele două subintervale au expresiile:

$$\begin{cases} s_1(x) = 1 + x + \dfrac{17}{24}x^2 - \dfrac{23}{48}x^3, & x \in [0,\ 2] \\ s_2(x) = 2 - \dfrac{23}{12}(x-2) - \dfrac{13}{6}(x-2)^2 + \dfrac{25}{12}(x-2)^3, & x \in [2,\ 3] \end{cases} \tag{6.197}$$

Se observă funcțiile spline (6.197) satisfac condițiile de continuitate la limita celor două subintervale. Derivatele corespunzătoare sunt:

$$\begin{cases} s_1'(x) = 1 + \dfrac{17}{12}x - \dfrac{23}{16}x^2, & x \in [0,\ 2] \\ s_2'(x) = -\dfrac{23}{12} - \dfrac{13}{3}(x-2) + \dfrac{25}{4}(x-2)^2, & x \in [2,\ 3] \end{cases}$$
$$\begin{cases} s_1''(x) = \dfrac{17}{12} - \dfrac{23}{8}x, & x \in [0,\ 2] \\ s_2''(x) = -\dfrac{13}{3} + \dfrac{25}{2}(x-2), & x \in [2,\ 3] \end{cases} \tag{6.198}$$

Pentru $x=2$ se obține:

$$\begin{aligned} & s_1(2) = s_2(2) = 2; \\ & s_1'(2) = s_2'(2) = -23/12 \\ & s_1''(2) = s_2''(2) = -13/3 \end{aligned} \tag{6.199}$$

7. METODE NUMERICE DE DERIVARE A FUNCȚIILOR

Derivarea numerică a funcțiilor este o operație de aproximare a derivatelor întâlnită în prelucrarea datelor experimentale, atunci când funcțiile sunt definite sub o formă *discretă,* aproximarea derivatelor făcându-se pe baza valorilor funcției într-un număr finit de puncte. Derivarea numerică a funcțiilor definite sub o formă *discretă* se poate face folosind *polinoamele de interpolare* prezentate în capitolul 6 sau alte metode cum ar fi dezvoltarea în serie Taylor sau cu diferențe finite prezentate în capitolul 5.

7.1. Derivarea folosind parabole de interpolare

Fie $f: [a, b] \rightarrow R$ o funcție definită pe intervalul $[a, b]$. Se consideră o rețea de noduri din acest interval, notată cu x_i , $i= 0, 1, 2, 3, ..., n,$ care împarte intervalul $[a, b]$ în n subintervale $[x_{i-1}, x_i]$. Se cunosc *valorile discrete* ale funcției $f(x)$ în nodurile x_i . Pentru calculul derivatelor funcției în punctele x_i se pot folosi. *funcții de interpolare polinomiale g(x)* de gradul $n-1$, unde n reprezintă numărul de puncte prin care se interpolează funcția, numite şi *parabole de interpolare.*

Astfel pentru $n=3$ şi $n=4$ se obțin următoarele *parabole de interpolare* :

- pentru $n=3$ se obține *parabola de interpolare de gradul II şi derivatele ei:*

$$\begin{aligned} g(x) &= Ax^2 + Bx + C; \\ g'(x) &= 2Ax + B; \\ g''(x) &= 2A \end{aligned} \tag{7.1}$$

Pentru uşurința calculelor, se aleg cele trei puncte echidistante la distanța h, ($x_{i-1}= -h,$ $x_i=0$, $x_{i+1}=h$), ca în figura 7.1

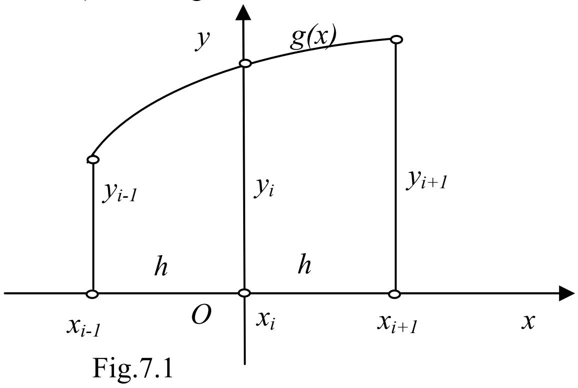


Fig.7.1

Condițiile de interpolare ale funcției în cele trei puncte $f(x_{i-1})=y_{i-1}$, $f(x_i)=y_i$, $f(x_{i+1})=y_{i+1}$, introduse în relația (7.1) conduc la sistemul:

$$\begin{cases} y_{i-1} = A(-h)^2 + B(-h) + C \\ y_i = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \\ y_{i+1} = A(h)^2 + B(h) + C \end{cases} \qquad (7.2)$$

Rezultă coeficienții polinomului (7.1):

$$A = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{2h^2}; \quad B = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}; \quad C = y_i \qquad (7.3)$$

Înlocuind în expresia (7.1) se obține *parabola de interpolare de gradul II* :

$$g(x) = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{2h^2} x^2 + \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} x + y_i \qquad (7.4)$$

Formulele de calcul ale primei şi ale celei de a doua derivate a lui $g(x)$ conform relației (7.4) în punctul $x_i=0$ sunt:

$$\begin{aligned} g'(0) &= B = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}; \\ g''(0) &= 2A = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} \end{aligned} \qquad (7.5)$$

- pentru $n=4$ se obține *parabola de interpolare de gradul III şi derivatele ei:*

$$\begin{aligned} p(x) &= Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \\ p'(x) &= 3Ax^2 + 2Bx + C \\ p''(x) &= 6Ax + 2B; \\ p'''(x) &= 6A \end{aligned} \qquad (7.6)$$

Pentru uşurința calculelor, se aleg cele patru puncte echidistante la distanța h, ($x_{i-1}= -h$, $x_i=0$, $x_{i+1}=h$, $x_{i+2}=2h$) ca în figura 7.2

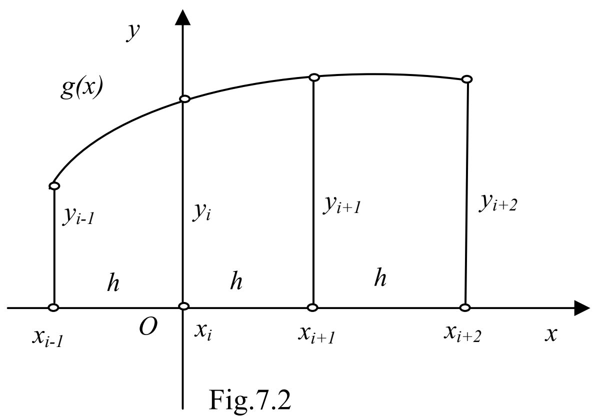


Fig.7.2

Condițiile de interpolare introduse în relația (7.1) conduc la sistemul:

$$\begin{cases} y_{i-1} = A(-h)^3 + B(-h)^2 + C(-h) + D \\ y_i = A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 0 + D \\ y_{i+1} = Ah^3 + Bh^2 + Ch + D \\ y_{i+2} = A(2h)^3 + B(2h)^2 + C(2h) + D \end{cases} \tag{7.7}$$

Rezolvând acest sistem se obțin valorile coeficienților polinomului (7.5):

$$A = \frac{1}{6h^3}\left(-y_{i-1} + 3y_i - 3y_{i+1} + y_{i+2}\right) \quad B = \frac{1}{2h^2}\left(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}\right)$$

$$C = \frac{1}{h}\left(-2y_{i-1} - 3y_i + 6y_{i+1} - y_{i+2}\right); \quad D = y_i \tag{7.8}$$

Înlocuind în expresia (7.6) se obține *parabola de interpolare de gradul III:*

$$p(x) = \frac{x^3}{6h^3}\left(-y_{i-1} + 3y_i - 3y_{i+1} + y_{i+2}\right) + \frac{x^2}{2h^2}\left(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}\right) + \\ + \frac{x}{h}\left(-2y_{i-1} - 3y_i + 6y_{i+1} - y_{i+2}\right) + y_i \tag{7.9}$$

Formulele de calcul ale primelor trei derivate a lui *g(x)* conform relației (7.5) în punctul $x_i=0$ sunt:

$$\begin{aligned} p'(0) &= C = \left(-2y_{i-1} - 3y_i + 6y_{i+1} - y_{i+2}\right)/h \\ p''(0) &= 2B = \left(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}\right)/h^2 \\ p'''(0) &= 6A = \left(-y_{i-1} + 3y_i - 3y_{i+1} + y_{i+2}\right)/h^3 \end{aligned} \tag{7.10}$$

Aplicația 7.1

Folosind parabolele de interpolare de gradul II şi III să se calculeze primele două, respectiv trei derivate ale funcției $f(x)=x^2 \ln x$ definită discret prin valorile ei în punctele $x_0=1;\ x_1=1,2;\ x_2=1,4;\ x_3=1,6;\ x_4=1,8$ şi $x_5=2$.

Rezolvare

- În tabelul 7.1. s-au determinat valorile exacte ale funcției şi ale primelor derivate conform relațiilor:

$$f'(x) = 2x\cdot \ln x + x;\quad f''(x) = 2\ln x + 3;\quad f'''(x) = \frac{2}{x};\quad f^{(IV)}(x) = -\frac{2}{x^2}; \tag{7.11}$$

Tabelul 7.1

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$	$f'''(x_i)$
1	0	1	3	2
1.2	0.262543	1.637572	3.364643	1.666667
1.4	0.659486	2.342122	3.672944	1.428571
1.6	1.203209	3.104012	3.940007	1.250000
1.8	1.904429	3.916032	4.175573	1.111111
2	2.772589			

- În tabelul 7.2. s-au determinat valorile aproximative ale primelor două derivate folosind parabola de interpolare de gradul II:

Tabelul 7.2

x_i	y_i	$g'_i(x)$	$g''_i(x)$
1.2	0.262543	1.648714	3.359988
1.4	0.659486	2.351666	3.669529
1.6	1.203209	3.112358	3.937395
1.8	1.904429	3.923449	4.173511

- În tabelul 7.3. s-au determinat valorile aproximative ale primelor trei derivate folosind parabola de interpolare de gradul III .

Tabelul 7.3

x_i	y_i	$g'_i(x)$	$g''_i(x)$	$g'''_i(x)$
1	0			
1.2	0.262543	1.638396	3.359988	1.547708
1.4	0.659486	2.342737	3.669529	1.339329
1.6	1.203209	3.104488	3.937395	1.180579
1.8	1.904429			
2	2.772589			

Din tabelele 7.2 şi 7.3 rezultă că valorile aproximative obţinute pentru primele două derivate folosind parabolele interpolare de gradul III sunt mai apropiate de valorile exacte decât cele corespunzătoare parabolelor de gradul II. Pentru derivatele de ordinul trei diferenţele dintre valorile exacte şi cele aproximative din tabelul 7.3 sunt mai mari decât pentru primele două derivate.

7.2. Derivarea folosind polinoamele de interpolare Lagrange

Fie f: $[a, b] \to R$ o funcţie definită pe intervalul $[a, b]$. Se consideră o reţea de noduri din acest interval, notată cu x_i , $i = 0, 1, 2, 3, ..., n$, care împarte intervalul $[a, b]$ în n subintervale. Se cunosc *valorile discrete* y_i ale funcţiei $f(x)$ în nodurile x_i. Pentru calculul derivatelor funcţiei în punctele x_i se folosesc polinoamele de interpolare Lagrange sub forma:

$$L(x_0 + qh) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} q^{[n+1]}}{k!(n-k)!(q-k)} y_k \tag{7.12}$$

unde s-a notat: $q = \dfrac{x - x_0}{h}$; $\quad q^{[n+1]} = q(q-1)(q-2)...(q-n)$ (7.13)

Ţinând seama de schimbarea de variabilă (7.13) pentru polinoamele de interpolare Lagrange:

$$q = \frac{x - x_0}{h}; \quad \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \tag{7.14}$$

prima derivată a lui *L(x)* se calculează astfel:

$$L'(x)=\frac{dL}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}y_k}{k!(n-k)!}\cdot\frac{d}{dq}\left(\frac{q^{[n+1]}}{q-k}\right)\cdot\frac{dq}{dx}$$
$$L'(x)=\frac{1}{h}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}y_k}{k!(n-k)!}\cdot\frac{d}{dq}\left(\frac{q^{[n+1]}}{q-k}\right) \qquad (7.15)$$

A doua şi a treia derivată se determină în mod asemănător:

$$L''(x)=\frac{d^2L}{dq^2}\left(\frac{dq}{dx}\right)^2=\frac{1}{h^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}y_k}{k!(n-k)!}\cdot\frac{d^2}{dq^2}\left(\frac{q^{[n+1]}}{q-k}\right)$$
$$L'''(x)=\frac{d^3L_n}{dq^3}\left(\frac{dq}{dx}\right)^3=\frac{1}{h^3}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}y_k}{k!(n-k)!}\cdot\frac{d^3}{dq^3}\left(\frac{q^{[n+1]}}{q-k}\right) \qquad (7.16)$$

Expresiile acestor derivate, pentru un număr 2, 3 şi 4 intervale de divizare, respectiv 3, 4 şi 5 puncte de interpolare echidistante, sunt:

- pentru $n = 2$ intervale, respectiv $n+1=3$ puncte de diviziune, expresia (7.12) capătă forma particulară:

$$L(q)=\frac{(q-1)(q-2)}{0!\cdot 2!}y_0-\frac{q(q-2)}{1!\cdot 1!}y_1+\frac{q(q-1)}{2!\cdot 0!}y_2 \qquad (7.17)$$

  iar derivatele de ordinul I şi II au expresiile:

$$L'(x)=\frac{dL}{dq}\cdot\frac{1}{h}=\frac{1}{h}\left[\frac{2q-3}{2}y_0-2(q-1)y_1+\frac{2q-1}{2}y_2\right]$$
$$L''(x)=\frac{dL'}{dq}\cdot\frac{1}{h}=\frac{1}{h^2}\left[y_0-2y_1+y_2\right];\qquad q=\frac{x-x_0}{h} \qquad (7.18)$$

  Formulele de calcul ale primelor două derivate a lui *L(x)* pentru $x=x_0$ respectiv $q=0$ conform relaţiei (7.18) sunt:

$$L'(x_0)=\frac{1}{2h}(-3y_0+4y_1-y_2)$$
$$L''(x_0)=\frac{1}{h^2}(y_0-2y_1+y_2) \qquad (7.19)$$

- pentru $n = 3$ intervale, respectiv $n+1=4$ puncte de diviziune, expresia (7.12) capătă forma particulară:

$$L(q)=-\frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{0!\cdot 3!}y_0+\frac{q(q-2)(q-3)}{1!\cdot 2!}y_1-$$
$$-\frac{q(q-1)(q-3)}{2!\cdot 1!}y_2-\frac{q(q-1)(q-2)}{3!\cdot 0!}y_3 \qquad (7.20)$$

  iar derivatele de ordinul I, II şi III au expresiile pentru $x=x_0$ respectiv $q=0$:

$$L'(x)=\frac{dL}{dq}\cdot\frac{1}{h}=\frac{1}{h}\left[-\frac{3q^2-12q+11}{6}y_0+\frac{3q^2-10q+6}{2}y_1-\frac{3q^2-8q+3}{2}y_2+\frac{3q^2-6q+2}{6}y_3\right]$$

$$L''(x)=\frac{d^2L}{dq^2}\cdot\left(\frac{1}{h}\right)^2=\frac{1}{h^2}\left[-(q-2)y_0+(3q-5)y_1-(3q-4)y_2+(q-1)y_3\right]$$

$$L'''(x)=\frac{d^3L}{dq^3}\cdot\left(\frac{1}{h}\right)^3==\frac{1}{h^3}\left[-y_0+3y_1-3y_2+y_3\right];\qquad q=\frac{x-x_0}{h}\qquad(7.21)$$

Formulele de calcul ale primelor trei derivate a lui $L(x)$ pentru $x=x_0$ respectiv $q=0$ conform relațiilor (7.21) sunt:

$$L'(x_0)=\frac{1}{h}\left(-\frac{11}{6}y_0+3y_1-\frac{3}{2}y_2+\frac{1}{3}y_3\right);$$
$$L''(x_0)=\frac{1}{h^2}(2y_0-5y_1+4y_2-y_3);\qquad(7.22)$$
$$L'''(x_0)=\frac{1}{h^3}\left[-y_0+3y_1-3y_2+y_3\right]$$

- pentru $n = 4$ intervale respectiv $n+1=5$ puncte de diviziune expresia (7.12) capătă forma particulară:

$$L(q)=\frac{(q-1)(q-2)(q-3)(q-4)}{0!\cdot4!}y_0-\frac{q(q-2)(q-3)(q-4)}{1!\cdot3!}y_1+$$
$$\frac{q(q-1)(q-3)(q-4)}{2!\cdot2!}y_2-\frac{q(q-1)(q-2)(q-4)}{3!\cdot1!}y_3+\frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!\cdot0!}y_4\qquad(7.23)$$

iar derivatele de ordinul I, II, III şi IV au expresiile:

$$L'(x)=\frac{dL}{dq}\cdot\frac{1}{h}=\frac{2q^3-15q^2+35q-25}{12h}y_0-\frac{4q^3-27q^2+46q-24}{6h}y_1+$$
$$+\frac{2q^3-12q^2+19q-6}{2h}y_2-\frac{4q^3-21q^2+28q-8}{6h}y_3+\frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12h}y_4$$

$$L''(x)=\frac{d^2L}{dq^2}\cdot\left(\frac{1}{h}\right)^2=\frac{6q^2-30q+35}{12h^2}y_0-\frac{6q^2-27q+23}{3h^2}y_1+$$
$$+\frac{6q^2-24q+19}{12h^2}y_2-\frac{6q^2-21q+14}{3h^2}y_3+\frac{6q^2-18q+11}{12h^2}y_4\qquad(7.24)$$

$$L'''(x)=\frac{d^3L}{dq^3}\cdot\left(\frac{1}{h}\right)^3=\frac{2q-5}{2h^3}y_0-\frac{4q-9}{h^3}y_1+6\frac{q-2}{h^3}y_2-\frac{4q-7}{h^3}y_3+\frac{2q-3}{2h^3}y_4$$

$$L^{(IV)}(x)=\frac{d^4L}{dq^4}\cdot\left(\frac{1}{h}\right)^4=\frac{1}{h^4}(y_0-4y_1+6y_2-4y_3+y_4);\quad q=\frac{x-x_0}{h}$$

Formulele de calcul ale primelor patru derivate a lui $L(x)$ pentru $x=x_0$ respectiv $q=0$ conform relației (7.24) sunt:

$$L'(x_0)=\frac{1}{h}\left(-\frac{25}{12}y_0+4y_1-3y_2+\frac{4}{3}y_3-\frac{1}{4}y_4\right);$$
$$L''(x_0)=\frac{1}{h^2}\left(\frac{35}{12}y_0-\frac{23}{3}y_1+\frac{19}{2}y_2-\frac{14}{3}y_3+\frac{11}{12}y_4\right);$$
$$L'''(x_0)=\frac{1}{h^3}\left(-\frac{5}{2}y_0+9y_1-12y_2+7y_3-\frac{3}{2}y_4\right); \qquad (7.25)$$
$$L^{(IV)}(x_0)=\frac{1}{h^4}\left(y_0-4y_1+6y_2-4y_3+y_4\right).$$

Aplicația 7.2

Folosind polinoamele de interpolare Lagrange cu 2, 3 şi 4 intervale să se calculeze primele trei derivate ale funcției $f(x)=x^2\ln x$ definită în punctele $x_0=1$; $x_1=1,2$; $x_2=1,4$; $x_3=1,6$; $x_4=1,8$ *şi* $x_5=2$.

Rezolvare

- în tabelul 7.4. s-au determinat valorile exacte ale funcției şi ale primelor trei derivate conform relațiilor (7.11):

Tabelul 7.4

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$	$f'''(x_i)$
1	0	1	3	2
1.2	0.262543	1.637572	3.364643	1.666667
1.4	0.659486	2.342122	3.672944	1.428571
1.6	1.203209	3.104012	3.940007	1.250000
1.8	1.904429	3.916032	4.175573	1.111111
2	2.772589			

- în tabelul 7.5. s-au determinat valori aproximative ale primelor două derivate folosind polinoamele de interpolare Lagrange cu două intervale:

Tabelul 7.5

x_i	y_i	$L'_i(x)$	$L''_i(x)$	$L'''_i(x)$
1	0			
1.2	0.262543	1.61776	3.669529	
1.4	0.659486	2.324879	3.937395	
1.6	1.203209	3.088746	4.173511	
1.8	1.904429			
2	2.772589			

- în tabelul 7.6. s-au determinat valori aproximative ale primelor trei derivate folosind polinoamele de interpolare Lagrange cu trei intervale:

Tabelul 7.6

x_i	y_i	$L'(x)$	$L''(x)$	$L'''(x)$
1	0			
1.2	0.262543	1.635618	3.401663	1.339329
1.4	0.659486	2.34062	3.701279	1.180579
1.6	1.203209			
1.8	1.904429			
2	2.772589			

- în tabelul 7.7. s-au determinat valori aproximative ale primelor trei derivate folosind polinoamele de interpolare Lagrange cu patru intervale.

Tabelul 7.7

x_i	y_i	$L'(x_i)$	$L''(x_i)$	$L'''(x_i)$
1	0			
1.2	0.262543	1.637205	3.372559	1.577454
1.4	0.659486			
1.6	1.203209			
1.8	1.904429			
2	2.772589			

Se observă că rezultatele obținute cu polinoamele de interpolare Lagrange cu mai multe intervale sunt mai apropiate de cele exacte.

7.3. Derivarea folosind polinoamele de interpolare Gregory-Newton cu diferențe finite progresive

Pentru calculul derivatelor unei funcții *f(x)* se pot folosi polinoamele de interpolare *Gregory-Newton cu diferențe finite progresive*:

$$P(x_0+qh)=y_0+q\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_0+\frac{q(q-1)(q-2)}{6}\Delta^3 y_0+ \\ +\frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{24}\Delta^4 y_0+\frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(q-4)}{120}\Delta^5 y_0+\dots \tag{7.26}$$

unde: $y_0=f(x_0);\quad q=\frac{x-x_0}{h},\quad \frac{dq}{dx}=\frac{1}{h}$

Dacă în relația (7.26) se iau în calcul numai termenii conținând primele cinci diferențe finite progresive și se derivează, se obțin următoarele *formule generale pentru calculul derivatelor cu diferențe finite progresive:*

$$P'(x)=\frac{dP}{dq}\frac{dq}{dx}=\frac{1}{h}\left(\Delta y_0+\frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0+\right. \\ \left.+\frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12}\Delta^4 y_0+\frac{5q^4-40q^3+105q^2-100q+24}{120}\Delta^5 y_0\right)$$

$$P''(x)=\frac{d^2P}{dq^2}\left(\frac{dq}{dx}\right)^2=\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0+(q-1)\Delta^3 y_0+\frac{6q^2-18q+11}{12}\Delta^4 y_0+\right.$$
$$\left.+\frac{2q^3-12q^2+21q-10}{12}\Delta^5 y_0\right) \quad (7.27)$$
$$P'''(x)=\frac{d^3P}{dq^3}\left(\frac{dq}{dx}\right)^3=\frac{1}{h^3}\left(\Delta^3 y_0+\frac{2q-3}{2}\Delta^4 y_0+\frac{2q^2-8q+7}{4}\Delta^5 y_0\right)$$
$$P^{IV}(x)=\frac{d^4P}{dq^4}\left(\frac{dq}{dx}\right)^4=\frac{1}{h^4}\left(\Delta^4 y_0+(q-2)\Delta^5 y_0\right); \qquad q=\frac{x-x_0}{h}$$

Pentru $x=x_0$, care corespunde lui $q=0$ în relația (7.27) se obțin următoarele *formule particulare de calcul a derivatelor cu diferențe finite progresive în* x_0:

$$P'(x_0)=\frac{1}{h}\left(\Delta y_0-\frac{1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{1}{3}\Delta^3 y_0-\frac{1}{4}\Delta^4 y_0+\frac{1}{5}\Delta^5 y_0\right);$$
$$P''(x_0)=\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0-\Delta^3 y_0+\frac{11}{12}\Delta^4 y_0-\frac{5}{6}\Delta^5 y_0\right);$$
$$P'''(x_0)=\frac{1}{h^3}\left(\Delta^3 y_0-\frac{3}{2}\Delta^4 y_0+\frac{7}{4}\Delta^5 y_0\right); \quad (7.28)$$
$$P^{IV}(x_0)=\frac{1}{h^4}\left(\Delta^4 y_0-2\Delta^5 y_0\right);$$

Aplicația 7.3

Folosind formulele de derivare (7.28) cu diferențe progresive, să se determine derivatele de ordinul I, II, III și IV în punctul $x_0=1$ pentru funcția $f(x)=x^2 \ln x$ definită în punctele: $x_0=1;\ x_1=1{,}2;\ x_2=1{,}4;\ x_3=1{,}6;\ x_4=1{,}8$ *și* $x_5=2$.

Rezolvare

- în tabelul 7.8 sunt calculate valorile exacte ale funcției și ale primelor patru derivate conform relațiilor (7.11);
- în tabelul 7.9 sunt calculate valorile diferențelor finite progresive în punctul $x_0=1$ ale funcției definită discret în tabelul 7.8;
- în tabelul 7.10 sunt calculate valorile aproximative ale primelor patru derivate în punctul $x_0=1$ folosind formulele cu diferențe finite progresive (7.28).

Tabelul 7.8

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$	$f'''(x_i)$	$f^{IV}(x_i)$
1	0	1	3	2	-2
1.2	0.262543	1.637572	3.364643	1.666667	-1.38889
1.4	0.659486	2.342122	3.672944	1.428571	-1.02041
1.6	1.203209	3.104012	3.940007	1.250000	-0.78125
1.8	1.904429	3.916032	4.175573	1.111111	-0.61728
2	2.772589				

Tabelul 7.9

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
1	0	0.262543	0.1344	0.012382	-0.00167	0.000397
1.2	0.262543	0.396943	0.146781	0.010715	-0.00127	
1.4	0.659486	0.543724	0.157496	0.009445		
1.6	1.203209	0.70122	0.16694			
1.8	1.904429	0.86816				
2	2.772589					

Tabelul 7.10

x_0	y_0	$P'(x_0)$	$P''(x_0)$	$P'''(x_0)$	$P^{IV}(x_0)$
1	0	0.999833	3.003972	1.947127	-1.53818

7.4. Derivarea folosind polinoamele de interpolare Newton cu diferențe finite regresive

Se aproximează funcția *f(x)* cu polinomul de interpolare *g(x)* dat de a *doua formulă a lui Newton cu diferențe finite regresive:*

$$Q(q) = y_n - q\nabla y_n + \frac{q(q-1)}{2}\nabla^2 y_n - \frac{q(q-1)(q-2)}{6}\nabla^3 y_n + \\ + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{24}\nabla^4 y_n - \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(q-4)}{120}\nabla^5 y_n + \ldots \tag{7.29}$$

unde: $y_n = f(x_n)$, $q = \frac{x_n - x}{h}$, $\frac{dq}{dx} = -\frac{1}{h}$

Dacă în relația (7.29) se iau în calcul numai termenii conținând primele cinci diferențe finite progresive şi se derivează, se obțin următoarele *formule generale pentru calculul derivatelor cu diferențe finite regresive:*

$$Q'(x) = \frac{dP}{dq}\frac{dq}{dx} = \frac{1}{h}\left(\nabla y_n - \frac{2q-1}{2}\nabla^2 y_n + \frac{3q^2-6q+2}{6}\nabla^3 y_n - \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12}\nabla^4 y_n + \right. \\ \left. + \frac{5q^4-40q^3+105q^2-100q+24}{120}\nabla^5 y_n\right)$$

$$Q''(x) = \frac{d^2P}{dq^2}\left(\frac{dq}{dx}\right)^2 = \frac{1}{h^2}\left(\nabla^2 y_n - (q-1)\nabla^3 y_n + \frac{6q^2-18q+11}{12}\nabla^4 y_n \right. \\ \left. - \frac{2q^3-12q^2+21q-10}{12}\nabla^5 y_n\right) \tag{7.30}$$

$$Q'''(x) = \frac{d^3P}{dq^3}\left(\frac{dq}{dx}\right)^3 = \frac{1}{h^3}\left(\nabla^3 y_n - \frac{2q-3}{2}\nabla^4 y_n + \frac{2q^2-8q+7}{4}\nabla^5 y_n\right)$$

$$Q^{IV}(x) = \frac{d^4P}{dq^4}\left(\frac{dq}{dx}\right)^4 = \frac{1}{h^4}\left(\nabla^4 y_n - (q-2)\nabla^5 y_n\right); \qquad q = \frac{x_n - x}{h}$$

În punctul $x=x_n$ care corespunde lui $q=0$ în relaţia (7.30) se obţin următoarele *formule particulare de calcul a derivatelor cu diferenţe finite regresive în* x_n:

$$Q'(x_n)=\frac{1}{h}\left(\nabla y_n+\frac{1}{2}\nabla^2 y_n+\frac{1}{3}\nabla^3 y_n+\frac{1}{4}\nabla^4 y_n+\frac{1}{5}\nabla^5 y_n\right);$$
$$Q''(x_n)=\frac{1}{h^2}\left(\nabla^2 y_n+\nabla^3 y_n+\frac{11}{12}\nabla^4 y_n+\frac{5}{6}\nabla^5 y_n\right);\qquad (7.31)$$
$$Q'''(x_n)=\frac{1}{h^3}\left(\nabla^3 y_n+\frac{3}{2}\nabla^4 y_n+\frac{7}{4}\nabla^5 y_n\right);$$
$$Q^{IV}(x_n)=\frac{1}{h^4}\left(\nabla^4 y_n+2\nabla^5 y_n\right)$$

Aplicaţia 7.4

Folosind formulele de derivare (7.31) cu diferenţe regrsive, să se determine derivatele de ordinul I, II, III şi IV în punctul $x_5=2$ pentru funcţia $f(x)=x^2\ lnx$ definită în punctele: $x_0=1;\ x_1=1,2;\ x_2=1,4;\ x_3=1,6;\ x_4=1,8$ şi $x_5=2$.

Rezolvare

- în tabelul 7.10 sunt calculate valorile exacte ale funcţiei şi ale primelor patru derivate conform relaţiilor (7.11);
- în tabelul 7.11 sunt calculate valorile diferenţelor finite regresive în punctul $x_5=2$ ale funcţiei definită în tabelul 7.10;
- în tabelul 7.12 sunt calculate valorile aproximative ale primelor patru derivate în punctul $x_5=2$ folosind formulele cu diferenţe finite regresive (7.31).

Tabelul 7.10

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$	$f'''(x_i)$	$f^{IV}(x_i)$
1	0	1	3	2	-2
1.2	0.262543	1.637572	3.364643	1.666667	-1.38889
1.4	0.659486	2.342122	3.672944	1.428571	-1.02041
1.6	1.203209	3.104012	3.940007	1.250000	-0.78125
1.8	1.904429	3.916032	4.175573	1.111111	-0.61728
2	2.772589				

Tabelul 7.11

x_i	y_i	∇y_i	$\nabla^2 y_i$	$\nabla^3 y_i$	$\nabla^4 y_i$	$\nabla^5 y_i$
1	0					
1.2	0.262543	0.262543				
1.4	0.659486	0.396943	0.1344			
1.6	1.203209	0.543724	0.146781	0.012382		
1.8	1.904429	0.70122	0.157496	0.010715	-0.00167	
2	2.772589	0.86816	0.16694	0.009445	-0.00127	0.000397

Tabelul 7.12

x_n	y_n	$Q'(x_n)$	$Q''(x_n)$	$Q'''(x_n)$	$Q^{IV}(x_n)$	
2	2.772589	4.772701	4.388794	1.029303	-0.29746	

7.5. Derivarea cu ajutorul polinoamelor de interpolare cu diferențe finite centrale Stirling

Pentru calculul derivatelor unei funcții *f(x)* se pot folosi polinoamele de interpolare *Stirling cu diferențe finite centrale*:

$$S(q)=y_c+q\mu\delta y_c+\frac{q^2}{2}\delta^2 y_c+\frac{q(q^2-1)}{6}\mu\delta^3 y_c+\frac{q^2(q^2-1)}{24}\delta^4 y_c+ \\ +\frac{q(q^2-1)(q^2-4)}{120}\mu\delta^5 y_c+\frac{q^2(q^2-1)(q^2-4)}{720}\delta^6 y_c+\ldots \qquad (7.32)$$

unde: $y_c=f(c),\quad q=\frac{x-c}{h},\quad \frac{dq}{dx}=\frac{1}{h}$

Dacă în relația (7.32) se iau în calcul numai termenii conținând primele șase diferențe finite centrale δ^2, δ^4 ... și centrale medii $\mu\delta$, $\mu\delta^3$, ... și se derivează, se obțin următoarele *formule generale pentru calculul derivatelor cu diferențe finite centrale:*

$$S'(x)=\frac{dS}{dq}\frac{dq}{dx}=\frac{1}{h}\left(\mu\delta y_0+q\delta^2 y_0+\frac{3q^2-1}{6}\mu\delta^3 y_0+\frac{2q^3-q}{12}\delta^4 y_0+\right. \\ \left.+\frac{5q^4-15q^2+4}{120}\mu\delta^5 y_0+\frac{3q^5-10q^3+4q}{360}\delta^6 y_0\right)$$

$$S''(x)=\frac{d^2S}{dq^2}\left(\frac{dq}{dx}\right)^2=\frac{1}{h^2}\left(\delta^2 y_0+q\mu\delta^3 y_0+\frac{6q^2-1}{12}\delta^4 y_0+\right. \\ \left.+\frac{2q^3-3q}{12}\mu\delta^5 y_0+\frac{15q^4-30q^2+4}{360}\delta^6 y_0\right) \qquad (7.33)$$

$$S'''(x)=\frac{d^3S}{dq^3}\left(\frac{dq}{dx}\right)^3=\frac{1}{h^3}\left(\mu\delta^3 y_0+q\delta^4 y_0+\frac{2q^2-1}{4}\mu\delta^5 y_0+\frac{q^3-q}{6}\delta^6 y_0\right)$$

$$S^{(IV)}(x)=\frac{d^4S}{dq^4}\left(\frac{dq}{dx}\right)^4=\frac{1}{h^4}\left(\delta^4 y_0+q\mu\delta^5 y_0+\frac{3q^2-1}{6}\delta^6 y_0\right)$$

$$S^{(V)}(x)=\frac{d^5S}{dq^5}\left(\frac{dq}{dx}\right)^5=\frac{1}{h^5}\left(\mu\delta^5 y_0+q\delta^6 y_0\right)$$

În punctul $x=c$ care corespunde lui $q=0$ în relația (7.33) se obțin următoarele formule de calcul a derivatelor cu diferențe finite centrale:

$$S'(c)=\frac{1}{h}\left(\mu\delta y_c-\frac{1}{6}\mu\delta^3 y_c+\frac{1}{30}\mu\delta^5 y_c\right)$$
$$S''(c)=\frac{1}{h^2}\left(\delta^2 y_c-\frac{1}{2}\delta^4 y_c+\frac{1}{90}\delta^6 y_c\right) \qquad (7.34)$$
$$S'''(c)=\frac{1}{h^3}\left(\mu\delta^3 y_c-\frac{1}{4}\mu\delta^5 y_c\right)$$
$$S^{(IV)}(c)=\frac{1}{h^4}\left(\delta^4 y_c-\frac{1}{6}\delta^6 y_c\right)$$
$$S^{(V)}(c)=\frac{1}{h^5}\left(\mu\delta^5 y_c\right)$$

Aplicația 7.5

Folosind formulele de derivare (7.3.9) să se determine derivatele de ordinul I, II, III și IV în punctul $x=c=2$ pentru funcția $f(x)= x^2 - \ln x$ definită discret în punctele: $x_0=1; x_1=1,1; x_2=1,2; .... x_{16}=2,6.$

Rezolvare

- în tabelul 7.13 sunt calculate valorile exacte ale funcției și ale primelor patru derivate calculate conform relațiilor (7.11).
- în tabelul 7.14 sunt calculate valorile diferențelor finite centrale δ^2, δ^4, δ^6 și diferențelor centrale medii $\mu\delta$, $\mu\delta^3$, $\mu\delta^5$ ale funcției definită discret în tabelul 7.13.
- în tabelul 7.15 sunt calculate valorile aproximative ale primelor patru derivate în punctul $x=c=2$ folosind formulele cu diferențe finite progresive (7.3.6).

Tabelul 7.13

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$	$f'''(x_i)$	$f^{IV}(x_i)$
1	1	1	3	-2	6
1.1	1.11469	1.290909	2.826446	-1.502630	4.098081
1.2	1.257678	1.566667	2.694444	-1.157407	2.893519
1.3	1.427636	1.830769	2.591716	-0.910332	2.100767
1.4	1.623528	2.085714	2.510204	-0.728863	1.561849
1.5	1.844535	2.333333	2.444444	-0.592593	1.185185
1.6	2.089996	2.575000	2.390625	-0.488281	0.915527
1.7	2.359372	2.811765	2.346021	-0.407083	0.718382
1.8	2.652213	3.044444	2.308642	-0.342936	0.571559
1.9	2.968146	3.273684	2.277008	-0.291588	0.460402
2	*3.306853*	*3.500000*	*2.250000*	*-0.250000*	*0.375000*
2.1	3.668063	3.723810	2.226757	-0.215959	0.308513
2.2	4.051543	3.945455	2.206612	-0.187829	0.256130
2.3	4.457091	4.165217	2.189036	-0.164379	0.214407

2.4	4.884531	4.383333	2.173611	-0.144676	0.180845
2.5	5.333709	4.600000	2.160000	-0.128000	0.153600
2.6	5.804489	4.815385	2.147929	-0.113792	0.131298

Tabelul 7.14

x_i	y_i	$\mu\delta y_i$	$\delta^2 y_i$	$\mu\delta^3 y_i$	$\delta^4 y_i$	$\mu\delta^5 y_i$	$\delta^6 y_i$
1	1						
1.1	1.11469	0.128839	0.028299				
1.2	1.257678	0.156473	0.026969	-0.001182	0.000296		
1.3	1.427636	0.182925	0.025935	-0.000927	0.000214	-0.000069	0.000026
1.4	1.623528	0.20845	0.025115	-0.00074	0.000159	-0.000047	0.000017
1.5	1.844535	0.233234	0.024454	-0.000601	0.000120	-0.000033	0.000011
1.6	2.089996	0.257418	0.023914	-0.000494	0.000093	-0.000024	0.000007
1.7	2.359372	0.281108	0.023466	-0.000411	0.000073	-0.000018	0.000005
1.8	2.652213	0.304387	0.023091	-0.000346	0.000058	-0.000013	0.000004
1.9	2.968146	0.32732	0.022774	-0.000294	0.000046	-0.000010	0.000003
2	*3.306853*	*0.349958*	*0.022503*	*-0.000252*	*0.000038*	*-0.000008*	*0.000002*
2.1	3.668063	0.372345	0.02227	-0.000217	0.000031	-0.000006	0.000001
2.2	4.051543	0.394514	0.022068	-0.000189	0.000026	-0.000005	0.000001
2.3	4.457091	0.416494	0.021892	-0.000165	0.000022	-0.000004	0.000001
2.4	4.884531	0.438309	0.021738	-0.000145	0.000018		
2.5	5.333709	0.459979	0.021601				
2.6	5.804489						

Tabelul 7.15

x_i	$S(x_i)$	$S'(x_i)$	$S''(x_i)$	$S'''(x_i)$	$S^{IV}(x_i)$
1	1				
1.1	1.11469				
1.2	1.257678	1.566700	2.682057	-1.182034	2.961997
1.3	1.427636	1.830791	2.582759	-0.926784	2.142989
1.4	1.623528	2.085729	2.503566	-0.740193	1.588845
1.5	1.844535	2.333344	2.439420	-0.600601	1.202993
1.6	2.089996	2.575008	2.386752	-0.494071	0.927597
1.7	2.359372	2.811770	2.342987	-0.411353	0.726759
1.8	2.652213	3.044449	2.306232	-0.346141	0.577497
1.9	2.968146	3.273687	2.275069	-0.294031	0.464690
2	*3.306853*	*3.500003*	*2.248422*	*-0.251889*	*0.378150*
2.1	3.668063	3.723811	2.225461	-0.217439	0.310862
2.2	4.051543	3.945456	2.205536	-0.189000	0.257906
2.3	4.457091	4.165219	2.188136	-0.165317	0.215767
2.4	4.884531	4.383334	2.172853	-0.145433	0.181897
2.5	5.333709				
2.6	5.804489				

Din analiza rezultatelor obținute pentru derivatele funcției în $x=2$ prin metoda exactă (tabelul 7.13) şi metoda aproximativă prezentată (tabelul 7.13) se observă că metoda de calcul a derivatelor cu diferențe centrale asigură cele mai bune rezultate în raport cu celelate metode cu diferențe finite.

7.6. Derivarea cu ajutorul dezvoltărilor în serie Taylor

Pentru a calcula derivatele unei funcții $f(x)$ în punctul x_i fiind cunoscute valorile ei notate cu $y_0, y_1, \dots y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, \dots y_n$, într-o vecinătate a punctului x_i notată cu $x_0, x_1 \dots x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots x_n$ se pot folosi formulele de dezvoltare în serie Taylor a funcției $f(x)$:

$$f(x \pm h) = f(x) \pm hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) \pm \frac{h^3}{6} f'''(x) + \dots \qquad (7.35)$$

Dacă în relația (7.35) se consideră: $x=x_i$; $x-h=x_{i-1}$; $x+h=x_{i+1}$; $f(x)=y$; $f(x-h)=y_{i-1}$; $f(x+h)=y_{i+1}$ se obțin relațiile:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h\,y_i' + \frac{h^2}{2} y_i'' + \frac{h^3}{6} y_i''' + \frac{h^4}{24} y_i^{IV} + \dots \\ y_{i-1} &= y_i - h\,y_i' + \frac{h^2}{2} y_i'' - \frac{h^3}{6} y_i''' + \frac{h^4}{24} y_i^{IV} + \dots \end{aligned} \qquad (7.36)$$

Adunând cele două relații (7.36) se obține:

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = h^2 y_i'' + \frac{h^4}{12} y_i^{IV} + \dots \qquad (7.37)$$

Neglijând termenii care conțin h^4, h^6, ... din relația (7.37), se obține formula pentru calculul derivatei a doua a lui $f(x)$ în punctul x_i:

$$y_i'' = \frac{1}{h^2}\left(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}\right) \qquad (7.38)$$

Scăzând cele două relații (7.36) se obține:

$$y_{i+1} - y_{i-1} = 2hy_i + \frac{h^3}{3} y_i^{III} + \dots \qquad (7.39)$$

Neglijând termenii care conțin h^3, h^5, ... se obține formula primei derivate a lui $f(x)$ în punctul x_i:

$$y_i' = \frac{1}{2h}\left(y_{i+1} - y_{i-1}\right) \qquad (7.40)$$

Formule asemănătoare se obțin şi pentru intervale neegale.

Astfel, dacă în relația (7.35) se consideră: $x=x_i$; $x-h=x_{i-1}$; $x+\alpha h=x_{i+1}$; $f(x)=y_i$; $f(x-h)=y_{i-1}$; $f(x+\alpha h)=y_{i+1}$; se obțin următoarele relații (fig. 7.3):

$$y_{i+1} = y_i + \alpha h\, y_i' + \frac{\alpha^2 h^2}{2} y_i'' + \frac{\alpha^3 h^3}{6} y_i''' + \frac{\alpha^4 h^4}{24} y_i^{IV} + ...$$
$$y_{i-1} = y_i - h\, y_i' + \frac{h^2}{2} y_i'' - \frac{h^3}{6} y_i''' + \frac{h^4}{24} y_i^{IV} + ... \qquad (7.41)$$

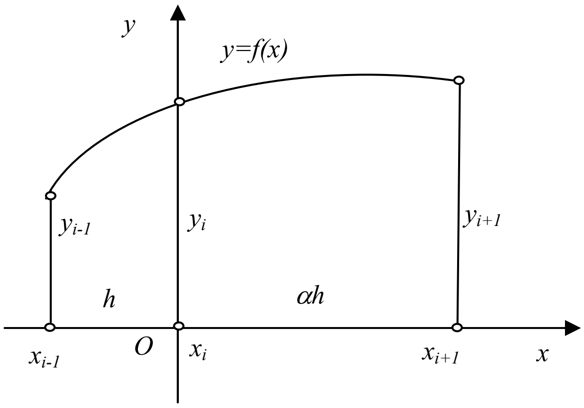


Fig.7.3

Dacă se scade din prima relație (7.41) a doua multiplicată cu α^2 se obține:

$$y_{i+1} - \alpha^2 y_{i-1} = (1-\alpha^2) y_i + (\alpha + \alpha^2) h y_i' + (\alpha^3 - \alpha^2) \frac{h^3}{6} y_i^{III} + $$
$$+ (\alpha^4 - \alpha^2) \frac{h^4}{24} y_i^{IV} + .. \qquad (7.42)$$

Dacă se neglijează termenii conținând h^3, h^4, ... în relația (7.42) se obține formula de calcul a primei derivate a lui $f(x)$ în punctul x_i:

$$y_i' = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)h} \left(y_{i+1} - (1-\alpha^2) y_i - \alpha^2 y_{i-1} \right) \qquad (7.43)$$

Dacă se adună prima relație (7.41) cu a doua multiplicată cu α se obține:

$$y_{i+1} - (1-\alpha) y_i + \alpha y_{i-1} =$$
$$= (\alpha^2 + \alpha) \frac{h^2}{2} y_i'' + (\alpha^3 - \alpha) \frac{h^3}{2} y_i''' + (\alpha^4 + \alpha) \frac{h^4}{24} y_i^{IV} + ... \qquad (7.44)$$

Dacă se neglijează termenii conținând h^3, h^4, ... în relația (7.44) se obține formula de calcul a derivatei a doua a lui $f(x)$ în punctul x_i:

$$y_i'' = \frac{2}{\alpha(\alpha+1)h^2} \left[y_{i+1} - (1-\alpha) y_i + \alpha y_{i-1} \right] \qquad (7.45)$$

8. METODE NUMERICE DE INTEGRARE A FUNCȚIILOR

Fie o funcție *f(x)*, $f:[a,b]\rightarrow R$ şi *F(x)* o primitivă a sa. Se consideră că funcțiile *f(x)* şi *F(x)* sunt continue. Integrala funcției *f(x)* pe intervalul [*a, b*], se calculează cu ajutorul primitivei *F(x)* conform formulei *Newton-Leibnitz:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{8.1}$$

În unele cazuri este foarte dificil sau chiar imposibil de determinat forma primitivei *F(x)* pentru a putea calcula integrala funcției *f(x)* conform formulei (8.1). În astfel de cazuri, se folosesc diferite metode numerice, care în principiu aproximează funcția dată *f(x)* cu o funcție polinomială *g(x),* astfel încât integrala se calculează cu aproximație cu ajutorul primitivei *G(x)* a funcției *g(x):*

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b g(x)dx = G(x)\Big|_a^b \tag{8.2}$$

În cadrul metodelor numerice de integrare se utilizează în general următorul algoritm:

1. se divizează intervalului [*a, b*] în *n* subintervale cu ajutorul a *n+1* puncte de diviziune x_i, $i=0, 1, 2, 3, \dots, n;$
2. se scrie funcția *f(x)* ca suma dintre o *funcție de aproximare g(x)* şi o *funcție rest r(x)*:

$$f(x) = g(x) + r(x) \tag{8.3}$$

3. se integrează funcția *f(x)* scrisă astfel obținându-se:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx + \int_a^b r(x)dx \tag{8.4}$$

Dacă *g(x)* este o *funcție polinomială* de forma:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k q_k(x) \tag{8.4'}$$

unde $q_k(x)$ repezintă un set de funcții polinomiale independente, atunci calculul integralei lui *g(x)* devine:

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{n} a_k q_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b a_k q_k(x)dx = \sum_{k=1}^{n} a_k \int_a^b q_k(x)\,dx \qquad (8.5)$$

sau: $$\int_a^b g(x)dx = \sum_{k=1}^{n} a_k I_k, \quad I_k = \int_a^b q_k(x)dx \qquad (8.5')$$

4. se aproximează integrala $\int_a^b f(x)dx$ cu integrala $\int_a^b g(x)dx$ prin minimizarea integralei funcției *r(x)*: $\delta = \int_a^b r(x)dx$ (8.6)

In continuare sunt prezentate metode de integrare numerică utilizând diferite tipuri de polinoame de interpolare şi puncte de diviziune (numite şi puncte de bază):

- *formule de integrare cu interval închis* (capetele intervalului [*a, b*] sunt printre punctele de bază);
- *formule de integrare cu interval deschis* (capetele intervalului [*a, b*] nu sunt printre punctele de bază).

Formulele de integrare numerică se mai numesc şi *cuadraturi.*

8.1. Cuadratura Newton-Cotes

Formula de integrare *Newton-Cotes* utilizează pentru aproximarea funcției *f(x)* polinoamele de interpolare *Lagrange L(x)*. Cele *n+1* puncte de bază x_i sunt echidistante (situate între ele la distanța *h*) şi includ şi capetele intervalului [*a, b*].

Polinoamele de interpolare *Lagrange L(x)* au expresia:

$$L(x_0 + qh) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} q^{[n+1]}}{k!(n-k)!(q-k)} y_k; \qquad q = \frac{x - x_0}{h} \qquad (8.7)$$

în care s-a notat: $q^{[n+1]} = q(q-1)(q-2)\ldots(q-n)$

Integrala (8.2) devine:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_0^n \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} q^{[n+1]}}{k!(n-k)!(q-k)} y_k \right) hdq \qquad (8.8)$$

în care s-a ținut seama de schimbarea de variabilă:

$$\begin{aligned} q &= \frac{x - x_0}{h} && \Rightarrow dq = \frac{dx}{h};\ dx = hdq \\ x &= x_0 = a && \Rightarrow q = 0; \\ x &= x_n = b && \Rightarrow q = n; \end{aligned} \qquad (8.9)$$

Ținând seama că cele *n+1* puncte de bază x_i sunt echidistante (situate la distanța $h = (b-a)/n$), relația (8.9) devine:

$$\int_a^b f(x)dx \cong (b-a)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n}\frac{(-1)^{n-k}y_k}{k!(n-k)!}\int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{(q-k)}dq \qquad (8.10)$$

S-a obţinut formula de integrare *Newton-Cotes*:

$$I_{n+1} = (b-a)\sum_{k=0}^{n} H_k \cdot y_k \qquad (8.11)$$

unde cu H_k s-au notat *coeficienţii Newton-Cotes:*

$$H_k = \frac{(-1)^{n-k}}{n \cdot k!(n-k)!}\int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{(q-k)}dq \qquad (8.12)$$

Cazuri particulare ale cuadraturii *Newton-Cotes*

În funcţie de numărul n de puncte de bază (puncte de diviziune) ale cuadraturii *Newton – Cotes* s-au prezentat următoarele cazuri particulare:

- pentru $n=2$ puncte de diviziune (capetele intervalului: $x_0=a$ şi $x_1=b$), relaţia (8.11) se scrie:

$$I_2 = (b-a)(H_0 y_0 + H_1 y_1) \qquad (8.14)$$

unde coeficienţii Cotes H_0 şi H_1 se determină conform relaţiei (8.12) :

$$H_0 = -\frac{1}{1\cdot 0!\cdot 1!}\int_0^1 \frac{q(q-1)}{q}dq = q - \frac{q^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$H_1 = \frac{1}{1\cdot 1!\cdot 0!}\int_0^1 \frac{q(q-1)}{q-1}dq = \frac{q^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} \qquad (8.15)$$

Înlocuind în relaţia (8.14) se obţine ***formula trapezelor*** (fig. 8.1):

$$I_2 = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) \qquad (8.16)$$

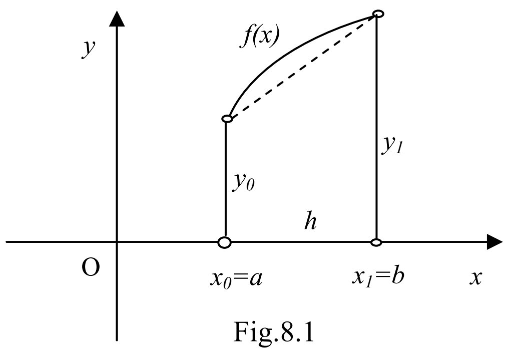


Fig.8.1

- pentru $n=3$ puncte de diviziune $x_0=a$, $x_1=a+h$ şi $x_2=b$, $h=(b-a)/2$ relaţia (8.11) se scrie:

$$I_3 = (b-a)(H_0 y_0 + H_1 y_1 + H_2 y_2) \tag{8.17}$$

unde coeficienţii Cotes H_0, H_1 şi H_2 se determină conform relaţiei (8.12):

$$H_0 = \frac{1}{2\cdot 0!\cdot 2!}\int_0^2 (q-1)(q-2)dq = \frac{1}{4}\left(2q - 3\frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{6}$$

$$H_1 = -\frac{1}{2\cdot 1!\cdot 1!}\int_0^2 q(q-2)dq = -\frac{1}{2}\left(-q^2 + \frac{q^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{2}{3} \tag{8.18}$$

$$H_2 = \frac{1}{2\cdot 2!\cdot 0!}\int_0^2 q(q-1)dq = \frac{1}{4}\left(-\frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{6}$$

Înlocuind în relaţia (8.17) se obţine *formula 1/3 Simpson:*

$$I_3 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \tag{8.19}$$

- pentru $n=4$ puncte de diviziune $x_0=a$, $x_1=a+h$, $x_2=a+2h$ şi $x_3=b$, $h=(b-a)/3$ relaţia (8.11) se scrie:

$$I_4 = (b-a)(H_0 y_0 + H_1 y_1 + H_2 y_2 + H_3 y_3) \tag{8.20}$$

unde coeficienţii Cotes H_0, H_1, H_2 şi H_3 se determină conform relaţiei (8.12):

$$H_0 = -\frac{1}{3\cdot 0!\cdot 3!}\int_0^3 (q-1)(q-2)(q-3)dq = -\frac{1}{18}\left(-6q + 11\frac{q^2}{2} - 6\frac{q^3}{3} + \frac{q^4}{4}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{1}{8}$$

$$H_1 = \frac{1}{3\cdot 1!\cdot 2!}\int_0^3 q(q-2)(q-3)dq = \frac{1}{6}\left(6\frac{q^2}{2} - 5\frac{q^3}{3} + \frac{q^4}{4}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{3}{8}$$

$$H_2 = -\frac{1}{3\cdot 2!\cdot 1!}\int_0^3 q(q-1)(q-3)dq = -\frac{1}{6}\left(3\frac{q^2}{2} - 4\frac{q^3}{3} + \frac{q^4}{4}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{3}{8} \tag{8.21}$$

$$H_3 = \frac{1}{3\cdot 3!\cdot 0!}\int_0^3 q(q-1)(q-2)dq = \frac{1}{18}\left(2\frac{q^2}{2} - 3\frac{q^3}{3} + \frac{q^4}{4}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{1}{8}$$

Înlocuind în relaţia (8.20) se obţine *formula 3/8 Simpson:*

$$I_4 = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) \tag{8.22}$$

- pentru $n=5$ puncte de diviziune $x_0=a$, $x_1=a+h$ $x_2=a+2h$ $x_3=a+3h$ şi $x_4=b$, $h=(b-a)/4$ relaţia (8.11) se scrie:

$$I_5 = (b-a)(H_0 y_0 + H_1 y_1 + H_2 y_2 + H_3 y_3 + H_4 y_4) \tag{8.23}$$

unde coeficienții Cotes H_0, H_1, H_2, H_3 şi H_4 se determină conform (8.12):

$$H_0 = \frac{1}{4\cdot 0!\cdot 4!}\int_0^4 (q-1)(q-2)(q-3)(q-4)dq = \frac{7}{90}$$

$$H_1 = -\frac{1}{4\cdot 1!\cdot 3!}\int_0^4 q(q-2)(q-3)(q-4)dq = \frac{32}{90}$$

$$H_2 = \frac{1}{4\cdot 2!\cdot 2!}\int_0^4 q(q-1)(q-3)(q-4)dq = \frac{12}{90} \tag{8.24}$$

$$H_3 = -\frac{1}{4\cdot 3!\cdot 1!}\int_0^4 q(q-1)(q-2)(q-4)dq = \frac{32}{90}$$

$$H_4 = \frac{1}{4\cdot 4!\cdot 0!}\int_0^4 q(q-1)(q-2)(q-3)dq = \frac{7}{90}$$

Înlocuind în relația (8.23) se obține *formula Newton Cotes28/90 :*

$$I_5 = \frac{28h}{90}\left(y_0 + \frac{32}{7}y_1 + \frac{12}{7}y_2 + \frac{32}{7}y_3 + y_4 \right) \tag{8.25}$$

- pentru $n=6$ puncte de diviziune: $x_0=a$, $x_1=a+h$, $x_2=a+2h$, $x_3=a+3h$, $x_4=a+4h$ şi $x_5=b$, $h=(b-a)/5$ relația (8.11) se scrie:

$$I_6 = (b-a)(H_0y_0 + H_1y_1 + H_2y_2 + H_3y_3 + H_4y_4 + H_5y_5) \tag{8.26}$$

unde coeficienții Cotes H_0, H_1, H_2, H_3, H_4 se determină conform (8.12):

$$H_0 = -\frac{1}{5\cdot 0!\cdot 5!}\int_0^5 (q-1)(q-2)(q-3)(q-4)(q-5)dq = \frac{19}{288}$$

$$H_1 = \frac{1}{5\cdot 1!\cdot 4!}\int_0^5 q(q-2)(q-3)(q-4)(q-5)dq = \frac{75}{288}$$

$$H_2 = -\frac{1}{5\cdot 2!\cdot 3!}\int_0^5 q(q-1)(q-3)(q-4)(q-5)dq = \frac{50}{288}$$

$$H_3 = \frac{1}{5\cdot 3!\cdot 2!}\int_0^5 q(q-1)(q-2)(q-4)(q-5)dq = \frac{50}{288} \tag{8.27}$$

$$H_4 = -\frac{1}{5\cdot 4!\cdot 1!}\int_0^5 q(q-1)(q-2)(q-3)(q-5)dq = \frac{75}{288}$$

$$H_5 = \frac{1}{5\cdot 5!\cdot 0!}\int_0^5 q(q-1)(q-2)(q-3)(q-4)dq = \frac{19}{288}$$

Înlocuind în relația (8.23) se obține *formula Newton Cotes 95/288:*

$$I_6 = \frac{95h}{288}\left(y_0 + \frac{75}{19}y_1 + \frac{50}{19}y_2 + \frac{50}{19}y_3 + \frac{75}{19}y_4 + y_5 \right) \tag{8.28}$$

- În mod asemănător se obține formula *Newton Cotes 41/140* pentru un număr $n=7$ puncte de diviziune a intervalului $[a, b]$: $x_0=a$, $x_1=a+h$, $x_2=a+2h$, $x_3=a+3h$, $x_4=a+4h$, $x_5=a+5h$ şi $x_6=b$, $h=(b-a)/6$:

$$I_7 = \frac{41h}{140}\left(y_0 + \frac{216}{41}y_1 + \frac{27}{41}y_2 + \frac{272}{41}y_3 + \frac{27}{41}y_4 + \frac{216}{41}y_5 + y_6 \right) \qquad (8.29)$$

Aplicația 8.1

Să se calculeze integrala definită $I = \int_1^5 \frac{x^2}{1+x}dx$ folosind cuadraturile Newton-Cotes corespunzătoare unui număr de 2, 3, 4 şi 5 puncte de diviziune a intervalului [1, 5].

Rezolvare

În tabelul 8.1 sunt prezentate rezultatele obținute pentru calculului integralei cu ajutorul formulelor (8.16), (8.19), (8.22), (8.25) respectiv (8.28).

Tabelul 8.1

	x	f(x)	I_2
n=2 pct.	1.000000	0.500000	9.3333333
	5.000000	4.166667	

	x	f(x)	I_3
n=3 pct.	1.000000	0.500000	9.1111111
	3.000000	2.250000	
	5.000000	4.166667	

	x	f(x)	I_4
n=4 pct.	1.000000	0.500000	8.6294872
	2.333333	1.633333	
	3.333333	2.564103	
	5.000000	4.166667	

	x	f(x)	I_5
n=5 pct.	1.000000	0.500000	9.0992593
	2.000000	1.333333	
	3.000000	2.250000	
	4.000000	3.200000	
	5.000000	4.166667	

	x	f(x)	I_6
n=6 pct.	1.000000	0.500000	9.099000
	1.800000	1.157143	
	2.600000	1.877778	
	3.400000	2.627273	
	4.200000	3.392308	
	5	4.166667	

Valoarea exactă a integralei este: $I = 9{,}098612289$.

8.2. Formula trapezelor generalizată

Se cunosc valorile funcției $f(x)$ în $n+1$ puncte echidistante ale intervalului $[a, b]$ notate cu $x_0=a$, $x_1=x_0+h$, $x_2=x_0+2h$, ... , $x_n= x_0+nh= b$. Dacă se aplică *formula trapezului* (8.16) pentru fiecare subinterval $[x_i, x_{i+1}]$, se obține *formula trapezelor generalizată*:

$$I_n = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \ldots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n) \qquad (8.30)$$

sau: $$I_n = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right) \qquad (8.31)$$

8.3. Formula 1/3 Simpson generalizată

Se cunosc valorile funcției *f(x)* în *2m+1* puncte echidistante ale intervalului [*a, b*] notate cu $x_0=a$, $x_1=x_0+h$, $x_2=x_0+2h$, ... , $x_n= x_0+2mh= b$. Dacă se aplică *formula 1/3 Simpson* (8.19) pentru fiecare subinterval în care se află câte trei puncte de diviziune (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}), *i=0, 1, 2, ... , 2m,* se obține astfel *formula 1/3 Simpson generalizată:*

$$I_{2m} = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + ... + \frac{h}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}) \qquad (8.32)$$

sau:

$$I_{2m} = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2}) + y_{2m}\right] \qquad (8.33)$$

Observație: În mod asemănător se pot deduce *formule generalizateale cuadraturii Newton-Cotes* corespunzătoare formulelor: *3/8 Simpson, 28/90 Newton Cotes, ...* deduse mai sus.

Aplicația 8.2

Să se calculeze integrala definită $I = \int_1^5 \frac{x^2}{1+x}dx$ cu ajutorul celor două cuadraturi Newton-Cotes: *formula trapezelor generalizată* și *formula 1/3 Simpson generalizată* pentru un număr de *9* puncte de diviziune a intervalului [1, 5].

Rezolvare

În tabelul 8.2 sunt prezentate rezultatele obținute pentru calculul integralei cu ajutorul formulelor (8.31) respectiv (8.33).

Tabelul 8.2

Formula trapezului generalizata				Formula 3/8 Simpson generalizata			
m=8 int.	x		I_9	m=8 int.	x		I_9
	1.000000	0.500000	9.1032107		1.000000	0.500000	9.098725
	1.500000	0.900000			1.500000	0.900000	
	2.000000	1.333333			2.000000	1.333333	
	2.500000	1.785714			2.500000	1.785714	
	3.000000	2.250000			3.000000	2.250000	
	3.500000	2.722222			3.500000	2.722222	
	4.000000	3.200000			4.000000	3.200000	
	4.500000	3.681818			4.500000	3.681818	
	5.000000	4.166667			5.000000	4.166667	

8.4. Cuadratura Gauss-Legendre

Spre deosebire de formulele de integrare *Newton-Cotes* cu interval închis, în care puncte de bază sunt echidistante şi conţin capetele intervalului, în cazul formulele de integrare cu interval deschis, *punctele de bază nu sunt echidistante şi nu conţin capetele intervalului* fiind rădăcinile unor polinoame ortogonale cum ar fi: *Legendre, Cebîşev, Hermite, Bessel,* etc.

Cuadratura *Gauss-Legendre* are ca puncte de bază rădăcinile z_i ale polinoamelor ortogonale *Legendre* care sunt puncte de interpolare al funcţiei *f(x)* pentru polinoamele de interpolare *Lagrange* .

Polinoamele Legendre sunt definite pe intervalul [*-1, 1*] prin următoarea formulă de recurenţă:

$$P_n(z)=\frac{2n-1}{n}zP_{n-1}(z)-\frac{n-1}{n}P_{n-2}(z);\qquad P_0(z)=1;\quad P_1(z)=z \tag{8.34}$$

Pentru *n=2, 3, 4* şi *5* se obţin polinoamele Legendre (fig.8.2):

- $P_2(z)=\frac{1}{2}(3z^2-1)$
- $P_3(z)=\frac{1}{2}(5z^3-3z)$ (8.35)
- $P_4(z)=\frac{1}{8}(35z^4-30z^2+3)$
- $P_5(z)=\frac{1}{8}(63z^5-70z^3+15z)$

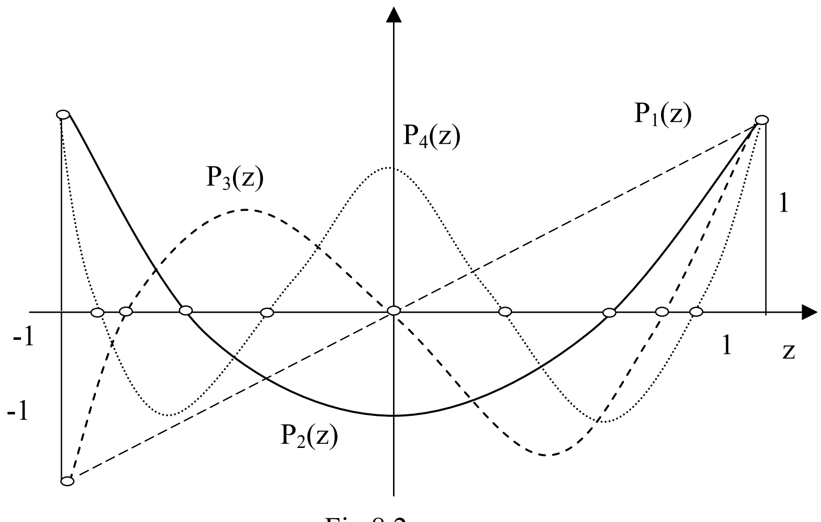


Fig.8.2

Proprietăţile polinoamelor *Legendre* sunt:

1. iau valorile $1, \ \pm 1$ la capetele intervalului:

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n \tag{8.36}$$

2. sunt ortogonale între ele oricare ar fi *m* şi *n*:

$$\int_{-1}^{1} P_n(z) P_m(z) dz = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \dfrac{2}{2n+1}, & n = m \end{cases} \tag{8.37}$$

3. sunt ortogonale cu orice polinom *Q(z)* având gradul mai mic decât acestea:

$$\int_{-1}^{1} P_n(z) Q_k(z) dz = 0, \quad k < n \tag{8.38}$$

4. au toate rădăcinile reale şi distincte situate în intervalul [*-1,1*].

Rădăcinile primelor cinci polinoame Legendre se calculează după cum urmază:

1. $$P2(z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -0{,}57735027 \\ z_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}57735027 \end{cases} \tag{8.39}$$

2. $$P_3(z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -\sqrt{\dfrac{3}{5}} = -0{,}77459667 \\ z_2 = 0 \\ z_3 = -\sqrt{\dfrac{3}{5}} = 0{,}77459667 \end{cases} \tag{8.40}$$

3. $$P_4(z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -\sqrt{\dfrac{15+\sqrt{120}}{35}} = -0{,}86113631 \\ z_2 = -\sqrt{\dfrac{15-\sqrt{120}}{35}} = -0{,}33998104 \\ z_3 = \sqrt{\dfrac{15-\sqrt{120}}{35}} = 0{,}33998104 \\ z_4 = \sqrt{\dfrac{15+\sqrt{120}}{35}} = 0{,}8611361 \end{cases} \tag{8.41}$$

4. $$P_5(z)=0 \Rightarrow \begin{cases} z_1=-\sqrt{\dfrac{35+\sqrt{280}}{63}}=-0{,}90617985 \\ z_2=-\sqrt{\dfrac{35-\sqrt{280}}{63}}=-0{,}53846931 \\ z_3=0 \\ z_4=\sqrt{\dfrac{35-\sqrt{280}}{63}}=0{,}53846931 \\ z_5=\sqrt{\dfrac{35+\sqrt{280}}{63}}=0{,}90617985 \end{cases} \tag{8.42}$$

Pentru calculul integralei definite $\int_a^b f(x)dx$ prin cuadratura *Gauss Legendre* se face schimbarea de variabilă :

$$x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}z; \quad dx=\frac{b-a}{2}dz\,. \tag{8.43}$$

$$x=a \Rightarrow z=-1; \qquad x=b \Rightarrow z=1;$$

Integrala devine:

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(z)dz \tag{8.44}$$

Integrala $\int_{-1}^{1} g(z)dz$ se calculează aproximând funcția *g(z)* cu ajutorul polinoamelor de interpolare *Lagrange L(z)* având ca puncte de interpolare rădăcinile z_i ale polinoamelor *Legendre:*

$$g(z)=\sum_{k=1}^{n} g(z_k)L_k(z)=\sum_{k=1}^{n}\prod_{i=1,\ i\neq k}^{n}\frac{z-z_i}{z_k-z_i}g(z_k) \tag{8.45}$$

Ținând seama de relațiile (8.44) şi (8.45) se obține *formula de calcul a integralei prin cuadratura Gauss Legendre*:

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \tag{8.46}$$

unde: $x_k=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{b-a}{2}z_k$

z_k – punctele de bază ale cuadraturii *Gauss-Legendre.*

$A_k=\int_{-1}^{1}[L_k(z)]dz$ ponderile cuadratrurii *Gauss-Legendre.* (8.46')

Calculul integralei unei funcții *f(x)* prin *cuadratura Gauss-Legendre* necesită determinarea a *2n* parametri:

- n rădăcini ale polinoamelor *Legendre* z_k ;
- n ponderi ale cuadratrurii *Gauss-Legendre* A_k.

Ponderile cuadraturii A_k se calculează conform relației (8.46') folosind folosind polinoamele de interpolare Lagrange având ca puncte de interpolare punctele de bază z_i .

Pentru determinarea polinoamelor Legendre se aproximează funcția de interpolare Lagrange *g(z)* cu un polinom de gradul *2n-1* de forma:

$$g(z) = P_n(z)Q(z) + R(z) \tag{8.47}$$

în care: $P_n(z)$ este polinomul Legendre de gradul n

Q(z) este un polinom oarecare având gradul maxim *n-1*

R(z) un polinom de gradul *2n-1* având proprietatea: $R(z_k)= g(z_k)$

Integrând pe intervalul [*-1, 1*] relația (8.47), se obține:

$$\int_{-1}^{1} g(z)dz = \int_{-1}^{1} P_n(z)Q(z)dz + \int_{-1}^{1} R(z)dz \tag{8.48}$$

Dacă se în relația (8.48) se pune condiția ca prima integrală să fie egală cu ultima:

$$\int_{-1}^{1} g(z)dz = \int_{-1}^{1} R(z)dz \tag{8.49}$$

unde:

$$\int_{-1}^{1} g(z)dz = \sum_{k=1}^{n} g(z_k); \quad \int_{-1}^{1} R(z)dz = \sum_{k=1}^{n} R(z_k)A_k \tag{8.49'}$$

rezultă că polinoamele $P_n(z)$ și *Q(z)* sunt ortogonale:

$$\int_{-1}^{1} P_n(z)Q(z)dz = 0 \tag{8.50}$$

Luând pentru *Q(z)* cele mai simple polinoame de forma: $Q(z)=z^k$, $k\leq n-1$ și înlocuind în relația (8.50) se obține:

$$\int_{-1}^{1} P_n(z)z^k dx = 0, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1 \tag{8.51}$$

Relația (8.51) permite determinarea polinoamelor Legendre care conform proprietății (8.38) sunt ortogonale cu orice polinom *Q(z)*.

Aceste polinoame se scriu sub forma generală:

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n \tag{8.52}$$

Scriind cele n ecuații corespunzătoare integralelor (8.51) şi ținând seama de proprietatea (8.36) a polinoamelor *Legendre* $P_n(1)=1$ se obține următorul sistem de $n+1$ ecuații cu $n+1$ necunoscute:

$$\begin{cases} a_0+\dfrac{a_2}{3}+\dfrac{a_4}{5}+...+\dfrac{a_n}{n+1}=0 & (n=par) \\ \dfrac{a_1}{3}+\dfrac{a_3}{5}+\dfrac{a_5}{7}+...+\dfrac{a_{n-1}}{n+1}=0 & (n-1=impar) \\ \dfrac{a_0}{3}+\dfrac{a_2}{5}+\dfrac{a_4}{7}+...+\dfrac{a_n}{n+3}=0 \\ \dfrac{a_1}{5}+\dfrac{a_3}{7}+\dfrac{a_5}{9}+...+\dfrac{a_{n-1}}{n+3}=0 \\ \dfrac{a_0}{5}+\dfrac{a_2}{7}+\dfrac{a_4}{9}+...+\dfrac{a_n}{n+5}=0 \\ \dfrac{a_1}{7}+\dfrac{a_3}{9}+\dfrac{a_5}{11}+...+\dfrac{a_{n-1}}{n+5}=0 \\ .... \\ a_0+a_1+a_2+...+a_n=1 \end{cases} \tag{8.53}$$

Din sistemul (8.53) pentru $n=2,\ 3,\ 4$ şi 5 se obțin primele cinci polinoame Legendre conform relațiilor (8.52):

- pentru $n=2$:

$$\begin{cases} a_0+\dfrac{a_2}{3}=0 \\ \dfrac{a_1}{3}=0 \\ a_0+a_1+a_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0=-\dfrac{1}{2} \\ a_1=0 \\ a_2=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow P_2(z)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}z^2 \tag{8.54}$$

- pentru $n=3$:

$$\begin{cases} a_0+\dfrac{a_2}{3}=0 \\ \dfrac{a_1}{3}+\dfrac{a_3}{5}=0 \\ \dfrac{a_0}{3}+\dfrac{a_2}{5}=0 \\ a_0+a_1+a_2+a_3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0=0 \\ a_1=-\dfrac{3}{2} \\ a_2=0 \\ a_3=\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow P_3(z)=-\frac{3}{2}z+\frac{5}{2}z^3 \tag{8.55}$$

- pentru $n=4$:

$$\begin{cases} a_0+\frac{a_2}{3}+\frac{a_4}{5}=0 \\ \frac{a_1}{3}+\frac{a_3}{5}=0 \\ \frac{a_0}{3}+\frac{a_2}{5}+\frac{a_4}{7}=0 \\ \frac{a_1}{5}+\frac{a_3}{7}=0 \\ a_0+a_1+a_2+a_3+a_4=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0=\frac{3}{8} \\ a_1=0 \\ a_2=-\frac{30}{8} \\ a_3=0 \\ a_4=\frac{35}{8} \end{cases} \Rightarrow P_4(z)=\frac{3}{8}-\frac{30}{8}z^2+\frac{35}{8}z^4 \qquad (8.56)$$

- pentru $n=5$:

$$\begin{cases} a_0+\frac{a_2}{3}+\frac{a_4}{5}=0 \\ \frac{a_1}{3}+\frac{a_3}{5}+\frac{a_5}{7}=0 \\ \frac{a_0}{3}+\frac{a_2}{5}+\frac{a_4}{7}=0 \\ \frac{a_1}{5}+\frac{a_3}{7}+\frac{a_5}{9}=0 \\ a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0=0 \\ a_1=\frac{15}{8} \\ a_2=0 \\ a_3=-\frac{70}{8} \\ a_4=0 \\ a_5=\frac{63}{8} \end{cases} \Rightarrow P_5(z)=\frac{15}{8}z-\frac{70}{8}z^3+\frac{63}{8}z^5 \qquad (8.57)$$

Ponderile cuadraturii Gauss Legendre se determină conform relației (8.46') astfel:

$$A_k=\int_{-1}^{1}\left(\prod_{i=1,\ i\neq k}^{n}\frac{z-z_i}{z_k-z_i}\right)dz, \qquad k=1,2,3,\ldots,n \qquad (8.58)$$

Astfel ținând seama de relațiile (8.39)... (8.42) pentru se obțin punctele de bază z_i respectiv ponderile A_i din tabelul 8.3:

Tabelul 8.3

n	z_i	A_i
2	x_1 = - 0,57735027 x_2 = 0,57735027	A_1 =1 A_2 =1
3	x_1 = - 0,77459667 x_2 = 0 x_3 = 0,77459667	A_1 = 0,555555 A_2 = 0,888888 A_3 = 0,555555
4	x_1 = - 0,86113631 x_2 = - 0,33998104 x_3 = 0,33998104 x_4 = 0,86113631	A_1= 0,347854 A_2 = 0,652145 A_3 = 0,652145 A_4 = 0,347854

n	z_i	A_i
5	x_1 = - 0,90617985 x_2 = - 0,53846931 x_3 = 0 x_4 = 0,53846931 x_5 = 0,90617985	A_1 = 0,236926 A_2 = 0,478628 A_3 = 0,568888 A_4 = 0,478628 A_5 = 0,236926
6	x_1 = - 0,93246951 x_2 = - 0,66120939 x_3 = - 0,23861919 x_4 = 0,23861919 x_5 = 0,66120939 x_6 = 0,93246951	A_1 = 0,17132450 A_2 = 0,36076158 A_3 = 0,46791394 A_4 = 0,46791394 A_5 = 0,36076158 A_6 = 0,17132450
7	x_1 = - 0,94910791 x_2 = - 0,74153119 x_3 = - 0,40584515 x_4=0 x_5 = 0,40584515 x_6 = 0,74153119 x_7 = 0,94910791	A_1 = 0,12948496 A_2 = 0,27970540 A_3 = 0,38183006 A_4 = 0,41795918 A_5 = 0,38183006 A_6 = 0,27970540 A_7 = 0,12948496

Aplicația 8.3

Să se calculeze integrala $I = \int_1^5 \frac{x^2}{1+x} dx$ folosind formulele cuadraturii Gauss-Legendre corespunzătoare pentru *n=2, 3, ... , 7* puncte de bază.

Rezolvare

Introducând valorile punctelor de bază z_i şi ponderilor A_i corespunzătoare din tabelul 8.3 în formula cuadraturii Gauss Legendre (8.46) s-au obţinut valorile din tabelul 8.4.

Tabelul 8.4

Nr. puncte de bază	z_i	A_i	x_i	$f(x_i)$	*Valoarea integralei*
n=2	-0.57735027	1.00000000	1.84529946	1.19675632	9.09090909
	0.57735027	1.00000000	4.15470054	3.34869823	
n=3	-0.77459667	0.55555556	1.45080666	0.85883558	9.09803922
	0.00000000	0.88888889	3.00000000	2.25000000	
	0.77459667	0.55555556	4.54919334	3.72939971	
n=4	-0.86113631	0.34785484	1.27772738	0.71676148	9.09857035
	-0.33998104	0.65214516	2.32003792	1.62123930	
	0.33998104	0.65214516	3.67996208	2.89363903	
	0.86113631	0.34785484	4.72227262	3.89702836	

n=5	-0.90617985	0.23692688	1.18764030	0.64475384	9.09860929
	-0.53846931	0.47862868	1.92306138	1.26516846	
	0.00000000	0.56888889	3.00000000	2.25000000	
	0.53846931	0.47862868	4.07693862	3.27390771	
	0.90617985	0.23692688	4.81235970	3.98440686	
n=6	-0.93246951	0.17132450	1.13506098	0.60343168	9.09861225
	-0.66120939	0.36076158	1.67758122	1.05105262	
	-0.23861919	0.46791394	2.52276162	1.80662982	
	0.23861919	0.46791394	3.47723838	2.70059035	
	0.66120939	0.36076158	4.32241878	3.51030328	
	0.93246951	0.17132450	4.86493902	4.03544378	
n=7	-0.94910791	0.12948496	1.10178418	0.57757042	9.098612363
	-0.74153119	0.2797054	1.51693762	0.91424584	
	-0.40584515	0.38183006	2.18830970	1.50195552	
	0	0.41795918	3.00000000	2.25000000	
	0.40584515	0.38183006	3.81169030	3.01951747	
	0.74153119	0.2797054	4.48306238	3.66544221	
	0.94910791	0.12948496	4.89821582	4.06775862	

Valoarea exactă a integralei este: $I = 9{,}098612289$. Se observă din tabelul 8.4. că eroarea de calcul scade cu creşterea numărului de puncte de bază.

8.5. Cuadratura Cebâşev

Faţă de cuadratura *Gauss-Legendre*, unde se impun punctele de bază z_i şi se determină ponderile A_i, la cuadratura *Cebâşev* se impun ponderile cuadraturii, notate cu c_i şi se determină punctele de bază z_i. Pentru calculul integralei definite $\int_a^b f(x)dx$ prin cuadratura Cebâşev se face schimbarea de variabilă :

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}z; \quad dx = \frac{b-a}{2}dz \,. \tag{8.61}$$

$$x = a \Rightarrow z = -1; \qquad x = b \Rightarrow z = 1;$$

Integrala devine: $$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} h(z)dz \tag{8.62}$$

Relaţia de calcul a integralei (8.62) prin cuadratura Cebâşev este:

$$\int_{-1}^{1} h(z)dz \cong 2\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot h(z_i) \tag{8.63}$$

unde c_i sunt ponderile cuadraturii Cebâşev.

Dacă în relația (8.63) ponderile c_i au aceeași valoare c_n și se aproximează funcția $h(z)$ cu polinomul de interpolare $p(z)$, se obține:

$$\int_{-1}^{1} h(z)dz \cong \int_{-1}^{1} p(z)dz = 2c_n \sum_{i=1}^{n} p(z_i) \tag{8.64}$$

în care $p(z)$ este un polinom de gradul $n-1$ de forma:

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_{n-1} z^{n-1} \tag{8.65}$$

relația (8.64) devine:

- pentru n impar: $$2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + ... \frac{a_{n-1}}{n}\right) = 2c_n \sum_{i=1}^{n} p(z_i) \tag{8.66}$$

- pentru n par: $$2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + ... \frac{a_{n-2}}{n-1}\right) = 2c_n \sum_{i=1}^{n} p(z_i) \tag{8.67}$$

Ținând seama de relația (8.65), relația (8.66) se mai scrie :

$$\begin{gathered} 2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + ... \frac{a_{n-1}}{n}\right) = \\ = 2c_n\left(na_0 + a_1\sum_{i=1}^{n} z_i + a_2\sum_{i=1}^{n} z_i^2 + a_3\sum_{i=1}^{n} z_i^3 + ... + + a_{n-1}\sum_{i=1}^{n} z_i^{n-1}\right) \end{gathered} \tag{8.68}$$

Identificând coeficienții termenilor $a_0, a_1, a_2, ... a_{n-1}$ din cele două paranteze ale relației (8.68) se obține un sistem de ecuații având ca necunoscute punctele de bază z_i , $i=1, 2, ...n$:

$$\begin{gathered} c_n = \frac{1}{n}; \quad \sum_{i=1}^{n} z_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} z_i^2 = \frac{n}{3}; \quad \sum_{i=1}^{n} z_i^3 = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} z_i^4 = \frac{n}{5}; \quad \sum_{i=1}^{n} z_i^5 = 0 \ \ ... \ \sum_{i=1}^{n} z_i^{n-1} = 0 \end{gathered} \tag{8.69}$$

Relația (8.64) pentru calculul integralei devine:

$$I_n = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} h(z_i) \tag{8.70}$$

Particularizând relația (8.70) pentru un număr de puncte de bază:

- pentru $n=2$ conform relațiilor (8.69) se obține:

$$\begin{gathered} \begin{cases} z_1 + z_2 = 0 \\ z_1^2 + z_2^2 = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -1/\sqrt{3} \\ z_2 = 1/\sqrt{3} \end{cases} \\ I_2 = \frac{2}{2}\left[h(z_1) + h(z_2)\right] \end{gathered} \tag{8.71}$$

- pentru $n=3$ conform relațiilor (8.69) se obține:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1 \\ z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -1/\sqrt{2} \\ z_2 = 0 \\ z_3 = 1/\sqrt{2} \end{cases} \tag{8.72}$$

$$\Rightarrow I_3 = \frac{2}{3}\left[h(z_1) + h(z_2) + h(z_3)\right]$$

- Pentru $n=4$, 5, 6 și 7 puncte de bază, ponderile c_3, c_4, ..., c_7 și punctele de bază z_i ale cuadraturii se obțin în mod asemănător și sunt date în tabelul 8.5.

Tabelul 8.5

n	z_i	c_i
2	z_1 = - 0,577350 z_2 = 0,577350	c_2=1/2
3	z_1 = - 0,707107 z_2 = 0 z_3 = 0,707107	c_3=1/3
4	z_1 = -0,794654 z_2 = -0,187592 z_3 = 0,187592 z_4 = 0,794654	c_4=1/4
5	z_1 = -0,832498 z_2 = -0,374541 z_3 = 0 z_4 = 0,374541 z_5 = 0, 832498	c_5=1/5
6	z_1 = -0,866247 z_2 = -0,422519 z_3 = -0,266635 z_4 = 0, 266635 z_5 = 0, 422519 z_6 = 0, 866247	c_6=1/6
7	z_1 = -0,883862 z_2 = -0,529657 z_3 = -0,323912 z_4= 0 z_5 = 0, 323912 z_6 = 0, 529657 z_7 = 0, 883862	c_7=1/7

Aplicația 8.4

Să se calculeze integrala $I=\int_1^5 \frac{x}{1+x^2}dx$ folosind formulele cuadraturii Cebâşev corespunzătoare pentru *n=2, 3, 4, 5, 6* şi *7* puncte de bază.

Rezolvare

Introducând valorile punctelor de bază z_i şi ponderilor c_i corespunzătoare din tabelul 8.5 în formula (8.70) s-au obținut valorile din tabelul 8.6.

Tabelul 8.6

Nr. de puncte de bază	z_i	x_i	$f(x_i)$	I_n	*Valoarea exactă*
n=2	-0.577350	1.845300	0.41889777	1.29281760	1,28247468
	0.577350	4.154700	0.22751103		
n=3	-0.707107	1.585786	0.45118452	1.28888893	
	0.000000	3.000000	0.30000000		
	0.707107	4.414214	0.21548218		
n=4	-0.794654	1.410692	0.47179515	1.28487778	
	-0.187592	2.624816	0.33269068		
	0.187592	3.375184	0.27237090		
	0.794654	4.589308	0.20802105		
n=5	-0.832498	1.335004	0.47983139	1.28385956	
	-0.374541	2.250918	0.37103257		
	0.000000	3.000000	0.30000000		
	0.374541	3.749082	0.24901552		
	0.832498	4.664996	0.20494498		
n=6	-0.866247	1.267506	0.48627326	1.28278542	
	-0.422519	2.154962	0.38182406		
	-0.266635	2.466730	0.34817426		
	0.266635	3.533270	0.26203432		
	0.422519	3.845038	0.24359863		
	0.866247	4.732494	0.20227359		
n=7	-0.883862	1.232276	0.48928885	1.28265869	
	-0.529657	1.940686	0.40717148		
	-0.323912	2.352176	0.36006008		
	0.000000	3.000000	0.30000000		
	0.323912	3.647824	0.25497455		
	0.529657	4.059314	0.23225237		
	0.883862	4.767724	0.20090537		

Se observă din tabelul 8.6. că eroarea de calcul scade cu creşterea numărului punctelor de bază .

8.6. Formula de integrare folosind extrapolarea Richardson

Pentru calculul integralei $I=\int_a^b f(x)dx$ se consideră două serii de diviziuni ale intervalului [*a*, *b*] cu n_1 şi respectiv n_2 subintervale cărora le corespund următoarele lungimi:

$$h_1=\frac{b-a}{n_1} \quad si \quad h_2=\frac{b-a}{n_2}, \qquad n_2>n_1 \tag{8.73}$$

Se notează cu I_{n1} şi I_{n2} cele două valori ale integralei calculate printr-o metodă de cuadratură.

Eroarea de calcul a integralei *I* printr-o metodă de cuadratură se scrie:

$$R=Mh^m, \quad m\geq 1 \tag{8.74}$$

în care: $M=f(\xi)$ este o valoare a funcției din intervalul [*a, b*];

$h=\frac{b-a}{n}$ mărimea unui subinterval corespunzătoare unui număr de *n* subintervale.

Valoarea integralei exacte *I* se poate scrie în funcție de cele două valori aproximative I_{n1}, I_{n2} şi de eroarea *R*:

$$I=I_{n1}+M\left(\frac{b-a}{n_1}\right)^m \tag{8.75}$$

$$I=I_{n2}+M\left(\frac{b-a}{n_2}\right)^m \tag{8.76}$$

Scăzând relația (8.75) din (8.76) rezultă:

$$M=\frac{1}{(b-a)^m}\frac{n_1^m n_2^m}{n_2^m-n_1^m}\left(I_{n2}-I_{n1}\right) \tag{8.77}$$

Înlocuind în relația (8.74) se obține eroarea de calcul în funcție de cele două valori calculate ale integralei I_{n1} şi I_{n2} şi de numărul de subintervale *n*, n_1, n_2,:

$$R_m=\frac{1}{n^m}\frac{n_1^m n_2^m}{n_2^m-n_1^m}\left(I_{n2}-I_{n1}\right) \tag{8.78}$$

Pentru cazul particular $n=n_2$ relația (8.78) devine:

$$R_{n2}=\frac{n_1^m}{n_2^m-n_1^m}\left(I_{n2}-I_{n1}\right) \tag{8.79}$$

Înlocuind rezultatul (8.4.7) în relația (8.4.4) se obține *formula de calcul a integralei prin extrapolarea Richardson:*

$$I_{n_1,n_2} = I_{n_2} + R_{n_2} = I_{n_2} + \frac{n_1^m}{n_2^m - n_1^m}\left(I_{n_2} - I_{n_1}\right) \tag{8.80}$$

sau dacă se notează $\alpha = \frac{n_2}{n_1}$:

$$I_{n_1,n_2} = I_{n_2} + \frac{1}{\alpha^m - 1}\left(I_{n_2} - I_{n_1}\right) \tag{8.81}$$

Observații

1. Dacă pentru determinarea aproximativă a integralei I_{n2} se foloseşte formula *trapezului* atunci eroarea este de ordinul lui h^2 şi în relația (8.74) $m=2$ iar dacă se foloseşte formula *1/3 Simpson* atunci eroarea este de ordinul lui h^4 şi în relația (8.74) $m=4$.
2. Se poate demonstra că dacă $I_{n1} \neq I_{n2}$, atunci valoarea integralei I_{n_1,n_2} calculată conform formulei (8.81) este în afara intervalului $\left\lfloor I_{n_1},\ I_{n_2} \right\rfloor$.

Aplicația 8. 5

Să se calculeze integrala $I = \int_1^2 x^2\, ln\, x\, dx$ folosind formula de calcul prin extrapolarea Richardson (8.81), în care cele două integrale I_{n1} şi I_{n2} se determină folosind formula *1/3 Simpson* şi *1/3 Simpson generalizată* (pentru două subintervale şi respectiv patru subintervale).

Rezolvare

Cele două integrale I_{n1} şi I_{n2} se determină folosind formulele *1/3 Simpson* şi *1/3 Simpson generalizată* (8.19) şi (8.33) astfel:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right); \\ I_4 &= \frac{h}{3}\left[y_0 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2 + y_4\right] \end{aligned} \tag{8.82}$$

Introducând rezultatele în formula de calcul a integralei prin *extrapolarea Richardson*(8.81) se obține:

$$I_{2,4} = I_4 + \frac{1}{2^4 - 1}\left(I_4 - I_2\right), \qquad \alpha = \frac{4}{2} \tag{8.83}$$

Valorile obționute cu ajutorul formulelor (8.82) şi (8.83) sunt prezentate în tabelul 8.7.

Tabelul 8.7

n_1=2 int	x	f(x)	I_2	I_4	$I_{2,4}$
n_2=4 int	1.000000	0.000000	1.070296	1.070594	1.070613
	1.250000	0.348662			
	1.500000	0.912296			
	1.750000	1.713823			
	2.000000	2.772589			
Valoarea exactă					1.0706147

Se observă din tabelul 8.7 o îmbunătăţirea a preciziei de calcul a integralei obţinută prin metodele clasice *1/3 Simpson* şi *1/3 Simpson generalizată* dacă se foloseşte metoda exptrapolării Richardson.

8.8. Formula de integrare Euler-MacLaurin

Se consideră funcţia generatoare de numere *Bernoulli:*

$$f(x)=\frac{x}{e^x-1}=\frac{x}{\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...}=\frac{1}{1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+...} \tag{8.84}$$

Este evident faptul că în jurul lui $x=0$ funcţia admite o dezvoltare în serie care poate fi srisă sub forma:

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n, \qquad B_0=f(0)=1 \tag{8.85}$$

în care B_n sunt *numerele lui Bernoulli.*

Prin identificarea relaţiilor (8.84) şi (8.85) se obţine identitatea:

$$\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+...\right)\left(\frac{B_0}{0!}+\frac{B_1}{1!}x+\frac{B_2}{2!}x^2+\frac{B_3}{3!}x^3+...\right)=1 \tag{8.86}$$

Înmulţind cele două serii şi identicând se obţine sistemul de ecuaţii liniare:

$$\frac{B_n}{n!}\frac{1}{1!}+\frac{B_{n-1}}{(n-1)!}\frac{1}{2!}+\frac{B_{n-2}}{(n-2)!}\frac{1}{3!}+...+\frac{B_0}{0!}\frac{1}{(n+1)!}=0 \qquad n=1,2,3,... \tag{8.87}$$

Înmulţind relaţia (8.87) cu $(n+1)!$ şi ţinând seama că

$$\frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!}=C_{n+1}^{n-k}, \quad k=0,1,2,3,...,n+1 \tag{8.88}$$

se obţine forma echivalentă a sistemului (8.87):

$$C_{n+1}^1B_n+C_{n+1}^2B_{n-1}+...+C_{n+1}^nB_1+1=0 \qquad n=1,2,3,... \tag{8.89}$$

Cu notația $B_k = B^k$ relația (8.89) se scrie simbolic sub forma echivalentă:

$$(B+1)^{n+1} - B^{n+1} = 0, \quad n = 1,\ 2,\ 3,... \qquad (8.90)$$

Sistemul de ecuații liniare (8.89) se scrie:

$$\begin{cases} 2B_1 + 1 = 0 \\ 3B_2 + 3B_1 + 1 = 0 \\ 4B_3 + 6B_2 + 4B_1 + 1 = 0 \\ 5B_4 + 10B_3 + 6B_2 + 4B_1 + 1 = 0 \\ .... \\ C_{n+1}^1 B_n + C_{n+1}^2 B_{n-1} + ... + C_{n+1}^n B_1 + 1 = 0 \end{cases} \qquad (8.91)$$

Pentru primele 14 ecuații rezultă primele 14 numere ale lui Bernoulli şi sunt date în tabelul 8.8:

Tabelul 8.8

B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	0	$\frac{7}{6}$

Dacă se defineşte operatorul Δ al funcției *F(x),* corespunzător diferențelor finite progresive şi operatorul invers $\frac{1}{\Delta}$, se pot scrie relațiile

$$\Delta F(x) = f(x) \qquad (8.92)$$

$$F(x) = \frac{1}{\Delta} f(x) \qquad (8.93)$$

Dacă se consideră o diviziune a intervalului $[a,\ b]$ $x_0=a,\ x_1,\ x_2,...\ x_i,\ ...,\ x_n=b$ se defineşte suma primelor *i-1* valori ale lui *f(x)* astfel:

$$S(x_i) = \sum_{j=1}^{i-1} f(x_j), \quad S(x_0) = 0 \qquad (8.94)$$

Diferența progresivă corespunzătoare lui $S(x_i)$ se scrie:

$$\Delta S(x_i) = S(x_{i+1}) - S(x_i) = f(x_i) \qquad (8.95)$$

Operatorul Δ aplicat lui $F(x_i)$ conform relației (8.92) se scrie:

$$\Delta F(x_i) = f(x_i) \qquad (8.96)$$

Scăzând membru cu membru de relațiile (8.95) şi (8.96) se obține:

$$\Delta\left[F(x_i) - S(x_i)\right] = 0 \qquad (8.97)$$

Rezultă că diferența $\left[F(x_i)-S(x_i)\right]$ nu depinde de indicele i şi se poate scrie:

$$\begin{aligned} &F(x_i)-S(x_i)=F(x_0)-S(x_0) \\ \Rightarrow \quad &F(x_i)=F(x_0)+S(x_i) \end{aligned} \tag{8.98}$$

Ținând seama de relațiile (8.93) şi (8.98) se obține:

$$F(x_i)=\frac{1}{\Delta}f(x_i)=F(x_0)+S(x_i) \tag{8.99}$$

Relația (8.99) arată că operatorul invers $\frac{1}{\Delta}$ este un operator al *sumelor finite.* Prin analogie cu operatorii diferențelor finite Δ şi al sumelor finite $\frac{1}{\Delta}$ se pot introduce operatorii derivatei D operatorul invers al derivatei (operatorul integralei $\frac{1}{D}$):

$$DF(x)=f(x) \tag{8.100}$$

$$\frac{1}{D}f(x)=F(x)=\int_{x_0}^{x}f(x)dx \tag{8.101}$$

Din dezvoltarea în serie Taylor funcției *f(x)*:

$$\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^kD^k}{k!}\right)f(x)=\left(e^{hD}-1\right)f(x) \tag{8.102}$$

rezultă relația simbolică între operatorii Δ şi D (respectiv $\frac{1}{\Delta}$ şi D):

$$\Delta=e^{hD}-1\ ;\quad \frac{1}{\Delta}=\frac{1}{e^{hD}-1} \quad\Leftrightarrow\quad hD\left(\frac{1}{\Delta}\right)=\frac{hD}{e^{hD}-1} \tag{8.103}$$

Ultima relație (8.103) reprezintă tocmai funcția generatoare a numerelor *Bernoulli* (8.84) şi se scrie simbolic:

$$\frac{hD}{e^{hD}-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}h^kD^k \tag{8.104}$$

Ținând seama de relația (8.103), relația simbolică (8.104) se mai poate astfel:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Delta}f(x)\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}h^{k-1}D^kf(x) \tag{8.105}$$

Integrând relația (8.105) între x_0 şi x_n se obține:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta}f(x_n)-\frac{1}{\Delta}f(x_0)= \\ &=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_n}f(x)dx+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{k!}h^{k-1}\left(D^{k-1}f(x_n)-D^{k-1}f(x_0)\right) \end{aligned} \tag{8.106}$$

Ținând seama de relația (8.99) se obține:

$$\frac{1}{\Delta}f(x_n)-\frac{1}{\Delta}f(x_0)=F(x_0)+\sum_{j=0}^{n-1}f(x_j)-F(x_0)=\sum_{j=0}^{n-1}f(x_j) \qquad (8.107)$$

Înlocuind (8.107) în relația (8.106) și ținând seama de numerele lui Bernoulli determinate mai sus B_{2k+1}= 0 și $B_1=-1/2$ se obține următoarea relație pentru calculul integralei $I=\int_a^b f(x)dx$ numită *formula Euler- Maclaurin:*

$$\int_a^b f(x)dx = h\left[\frac{f(x_0)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n-1})+\frac{f(x_n)}{2}\right]- \\ -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}h^{2k}\left(D^{2k-1}f(x_n)-D^{2k-1}f(x_0)\right) \qquad (8.108)$$

Relația (8.108) se mai scrie sub forma:

$$\int_a^b f(x)dx = h\left[\frac{f(x_0)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n-1})+\frac{f(x_n)}{2}\right]- \\ -\sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}h^{2k}\left(D^{2k-1}f(x_n)-D^{2k-1}f(x_0)\right)+R_{2m} \qquad (8.109)$$

în care: $$R_{2m}=-nh^{2m+3}\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}D^{2m+2}f(\xi), \qquad \xi\in(x_0,x_n) \qquad (8.110)$$

reprezintă eroarea de calcul a integralei cu ajutorul *formulei Euler-MacLaurin.*

Observație

Primul termen al relației (8.108) corespunde *formulei generalizate a trapezelor* (8.30) iar termenul al doilea reprezintă o corecție corespunzătoare aproximării prin funcții *spline.*

Aplicația 8.6

Să se calculeze integrala $I=\int_1^2\left(e^x-x\ln x\right)dx$ cu *formula de integrare Euler-MacLaurin,* folosind primele cinci derivate ale funcției *f(x)* și respectiv cinci subintervale ale domeniului de integrare [*1, 2*] având lungimea corespunzătoare *h=0,2.*

Rezolvare

Particularizând *formula de integrare Euler-MacLaurin* (8.109) pentru cinci subintervale și considerând numai termenii conținând primele cinci derivate ale funcției *f(x)* se obține formula:

$$\int_1^2 f(x)dx = h\cdot\left[\frac{f(x_0)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+\frac{f(x_5)}{2}\right]-$$
$$-\frac{1}{6}\frac{h^2}{2!}\left[f'(x_5)-f'(x_0)\right]+\frac{1}{30}\frac{h^4}{4!}\left[f'''(x_5)-f'''(x_0)\right]-\frac{1}{42}\frac{h^6}{6!}\left[f^V(x_5)-f^V(x_0)\right] \quad (8.111)$$

Înlocuind valorile funcției şi ale primelor cinci derivate ale ei în relația (8.111) se obțin rezultatele prezentate în tabelul 8.9.

Tabelul 8.9.

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$	$f'''(x_i)$	$f^{(4)}(x_i)$	$f^{(5)}(x_i)$	*Valoarea calculată*
0	1	2.718282	1.718282	1.718282	3.718282	0.718282	8.718282	4.034480
1	1.2	3.101331	2.137795	2.486784	4.014561	2.16271	6.213635	
2	1.4	3.584139	2.718728	3.340914	4.565404	3.326337	5.617049	
3	1.6	4.201027	3.483029	4.328032	5.343657	4.464751	5.86856	
4	1.8	4.991631	4.461861	5.494092	6.358289	5.706712	6.621207	
5	2	6.002762	5.695909	6.889056	8.5.63905	8.5.13905	8.5.764056	
Valoarea exactă a integralei								*4.034478*

Se observă din tabelul 8.9 că valoarea calculată folosind *formula de integrare Euler-MacLaurin* este foarte apropiată de cea exactă.

8.9. Formulele de integrare Gauss Legendre generalizate

Matricea de rigiditate a elementului finit tridimensional prezentat în lucrarea [12] se obține integrând numeric fiecare element al matricei obținute după efectuarea produselor de matrice şi se scrie astfel:

$$\left[K^e\right]=\begin{bmatrix} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k'_{1,1}\,d\xi d\eta d\zeta & \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k'_{1,2}\,d\xi d\eta d\zeta & \cdots & \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k'_{1,23}\,d\xi d\eta d\zeta & \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k'_{1,24}\,d\xi d\eta d\zeta \\ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k'_{21}\,d\xi d\eta d\zeta & \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k'_{2,2}\,d\xi d\eta d\zeta & \cdots & \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k'_{2,23}\,d\xi d\eta d\zeta & \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k'_{2,24}\,d\xi d\eta d\zeta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k'_{231}\,d\xi d\eta d\zeta & \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k'_{232}\,d\xi d\eta d\zeta & \cdots & \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k'_{2323}\,d\xi d\eta d\zeta & \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k'_{2324}\,d\xi d\eta d\zeta \\ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k'_{241}\,d\xi d\eta d\zeta & \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k'_{242}\,d\xi d\eta d\zeta & \cdots & \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k'_{2423}\,d\xi d\eta d\zeta & \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k'_{2424}\,d\xi d\eta d\zeta \end{bmatrix} \quad (8.112)$$

In relația matriceală (8.113) expresiile $k'_{i,j}$ cu $i = 1, 2,...., 24$ și $j = 1, 2,.....,$ 24 sunt funcții polinomiale de variabile ξ, η și ζ. Matricea de rigiditate este o matrice simetrică. Integralele de volum din relația (8.113) nu pot fi ușor calculate analitic, de aceea pentru calculul lor se folosește *metoda Gauss-Legendre* (8.46) generalizată pentru cazul tridimensional. Aceste formule se bazează pe polinoamele ortogonale Legendre scrise sub forma generală:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right], \quad n = 0, 1, 2, \quad \dots . \qquad (8.113)$$

Polinoamele Legendre $P_n(x)$ au n rădăcini distincte cuprinse în intervalul (-1, 1). Primele cinci polinoame Legendre au forma (8.34-35):

$$P_0(x) = 1; \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right);$$
$$P_1(x) = x; \qquad P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right). \qquad (8.114)$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right).$$

Calculul integralelor de volum (8.112) se efectuează cu ajutorul polinomului Legendre de ordinul patru, $P_4(x)$ având rădăcinile conform (8.41):

$$x_{1,4} = \mp 0{,}86113631; \qquad x_{2,3} = \mp\ 0{,}33998204. \qquad (8.115)$$

Cele trei cazuri de aplicare a formulelor cadraturii Gauss Legendre sunt:

1. Pentru cazul unidimensional al integralei liniare $I_1 = \int_a^b k'(\xi)d\xi$ dacă se face schimbarea de variabilă:

$$\xi = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t\,, \qquad (8.116)$$

se obține: $$I_1 = \int_a^b k'(\xi)d\xi = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} k'\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)dt. \qquad (8.117)$$

Aplicând formula (8.46) se obține:

$$\int_a^b k'(\xi)d\xi = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i k'(\xi_i),\ i = 1, 2,..., n. \qquad (8.118)$$

cu $$\xi_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i\,, \qquad (8.119)$$

2. Pentru cazul bidimensional al integralei de suprafață:

$$I_2 = \int_a^b \int_{c(\xi)}^{d(\xi)} k'(\xi,\eta)d\xi d\eta, \qquad (8.120)$$

dacă se notează $F(\xi)=\int_{c(\xi)}^{d(\xi)} k'(\xi_i,\eta)d\eta$ (8.121)

se obține: $I_2=\int_a^b\int_{c(\xi)}^{d(\xi)} k'(\xi,\eta)d\xi d\eta=\int_a^b F(\xi)d\xi.$ (8.122)

In urma aplicării formulei (8.118) se ajunge la rezultatul:

$$I_2=\int_a^b\int_{c(\xi)}^{d(\xi)} k'(\xi,\eta)d\xi d\eta=\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n}A_iF(\xi_i), \tag{8.123}$$

în care: $\xi_i=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t_i$, $i = 1, 2,..., n$ (8.124)

$$F(\xi)=\int_{c(\xi)}^{d(\xi)} k'(\xi_i,\eta)d\eta\,. \tag{8.125}$$

Aplicând relația (8.118) se obține:

$$F(\xi_i)=\frac{d(\xi_i)-c(\xi_i)}{2}\sum_{j=1}^{m}A_jk'(\xi_i,\eta_j), \tag{8.126}$$

în care: $\eta_j=\frac{d(\xi_i)+c(\xi_i)}{2}+\frac{d(\xi_i)-c(\xi_i)}{2}t_j$, $j = 1, 2,...., m.$ (8.127)

Se obține astfel *formula Gauss Legendre generalizată pentru cazul bidimensional:*

$$I_2=\int_a^b\int_{c(x)}^{d(x)} k'(\xi,\eta)d\xi d\eta=\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n}A_i\left(\frac{d(\xi_i)-c(\xi_i)}{2}\sum_{j=1}^{m}A_jk'(\xi_i,\eta_j)\right) \tag{8.128}$$

3. Pentru cazul tridimensional al integralei de volum:

$$I_3=\int_a^b\int_{c(\xi)}^{d(\xi)}\int_{\alpha(\xi,\eta)}^{\beta(\xi,\eta)} k'(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta \tag{8.129}$$

se notează cu: $F_1(\xi_i,\eta_j)=\int_{\alpha(\xi,\eta)}^{\beta(\xi,\eta)} k'(\xi_i,\eta_j,\zeta)d\zeta\,.$ (8.130)

Aplicând relația (8.118) se obține:

$$F_1(\xi_i,\eta_j)=\frac{\alpha(\xi_i,\eta_j)-\beta(\xi_i,\eta_j)}{2}\sum_{k=1}^{p}A_kk'(\xi_i,\eta_j,\zeta_k), \tag{8.131}$$

în care: $\zeta_k=\frac{\alpha(\xi_i,\eta_j)+\beta(\xi_i,\eta_j)}{2}+\frac{\alpha(\xi_i,\eta_j)-\beta(\xi_i,\eta_j)}{2}t_k$, $k = 1, 2,...., p.$ (8.132)

In final rezultă *formula Gauss Legendre generalizată în cazul tridimensional:*

$$\int_a^b \int_{c(\xi)}^{d(\xi)} \int_{\alpha(\xi,\eta)}^{\beta(\xi,\eta)} k'(\xi,\eta,\zeta) d\xi d\eta d\zeta =$$
$$= \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i \left(\frac{d(\xi_i)-c(\xi_i)}{2} \sum_{j=1}^{m} A_j \left(\frac{\alpha(\xi_i,\eta_j)-\beta(\xi_i,\eta_j)}{2} \sum_{k=1}^{p} A_k k'(\xi_i,\eta_j,\zeta_k) \right)\right), \tag{8.133}$$

în care:

$$\xi_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_i \text{ , } i = 1, 2,..., n; \tag{8.134}$$

$$\xi_j = \frac{d(\xi_i)+c(\xi_i)}{2} + \frac{d(\xi_i)-c(\xi_i)}{2} t_j \text{, } j = 1, 2,...., m; \tag{8.135}$$

$$\zeta_k = \frac{\alpha(\xi_i,\eta_j)+\beta(\xi_i,\eta_j)}{2} + \frac{\alpha(\xi_i,\eta_j)-\beta(\xi_i,\eta_j)}{2} t_k \text{ , } k = 1, 2,...., p. \tag{8.136}$$

Pentru integralele de volum (8.129) numărul de puncte Gauss este acelaşi după toate cele trei direcţii, deci $i = j = k = 4$.

La aceste integrale limitele de integrare sunt *-1* şi *+1* adică:

$$a = -1, b = 1; \tag{8.137}$$

$$c(\xi) = -1; d(\xi) = 1; \tag{8.138}$$

$$\alpha(\xi, \eta) = -1; \beta(\xi, \eta) = 1. \tag{8.139}$$

Acest lucru constituie un avantaj în calculul numeric al integralelor care reptrezintă elementele matricei de rigiditate (8.112).

9. METODE DE REZOLVARE A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE ORDINARE

9.1. Ecuații diferențiale ordinare de ordinul *n*

Se consideră ecuația diferențială ordinară de ordinul *n* sub forma implicită:

$$F(x;\ y;\ y';\ y'';\ y''';\ \dots\ y^{(n)}) = 0 \tag{9.1}$$

care se poate scrie sub forma explicită astfel:

$$y^{(n)} = g(x;\ y;\ y';\ y'';\ y''';\ \dots\ y^{(n-1)}) \tag{9.2}$$

Rezolvarea ecuației diferențiale ordinare (9.2) este echivalentă cu rezolvarea unui sistem de *n* ecuații diferențiale de ordinul I de forma:

$$\begin{cases} y_1' = y^{(n)} = g(x;y_1;y_2;\dots y_n) \\ y_2' = y^{(n-1)} = y_1 \\ y_3' = y^{(n-2)} = y_2 \\ y_4' = y^{(n-3)} = y_3 \\ \dots \\ y_{n-1}' = y'' = y_{n-2} \\ y_n' = y' = y_{n-1} \\ (y_n = y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ \dots \\ y_{n-2}' \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g(x;y_1;y_2;\dots y_n) \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{n-3} \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{Bmatrix} \tag{9.3}$$

cu condițiile la limită:

$$\begin{Bmatrix} y_1'(x_0) \\ y_2'(x_0) \\ y_3'(x_0) \\ \dots \\ y_{n-2}'(x_0) \\ y_{n-1}'(x_0) \\ y_n'(x_0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_{10}' \\ y_{20}' \\ y_{30}' \\ \dots \\ y_{(n-2)0}' \\ y_{(n-1)0}' \\ y_{n0}' \end{Bmatrix} \tag{9.3'}$$

Sistemul de *n* ecuații diferențiale de ordinul I sub forma (9.3) şi (9.3'), se rezolvă folosind aceleaşi metode ca şi în cazul ecuației diferențială ordinară de ordinul I: $y' = f(x;y);\quad y(x_0) = y_0$ (9.4)

Fie o diviziune a intervalului $[a,\ b]$ formată din nodurile:

$$x_0=a,\ x_1,\ x_2,\ \dots\ x_i,\ x_{i+1},\ \dots,\ x_n=b. \tag{9.5}$$

Pentru rezolvarea ecuației diferențiale (9.4) se folosesc:

- *metode unipas* - soluția se determină prin iterații succesive pentru subintervalele $[x_i, x_{i+1}]$ astfel încât soluția y_{i+1} (corespunzătoare nodului x_{i+1}) se determină pe baza datelor corespunzătoare nodului x_i şi/sau a datelor corespunzătoare unor puncte situate în interiorul subintervalului (*metoda dezvoltării în serie Taylor, Euler, Runge Kutta*);
- *metode multipas* sau *metode de extrapolare* - soluția se determină prin iterații succesive pentru subintervalele $[x_i, x_{i+1}]$ astfel încât soluția y_{i+1} (corespunzătoare nodului x_{i+1}) se determină pe baza datelor corespunzătoare nodurilor $x_0, x_1, x_2, \dots x_i$ şi/sau a datelor corespunzătoare unor puncte situate în subintervalele anterioare subintervalului $[x_i, x_{i+1}]$ (metoda *Adams, Adams-Bashforth, Adams-Moulton*).

9.2. Metoda dezvoltării în serie Taylor

Se consideră ecuația diferențială ordinară de ordinul I cu condiții la limită:

$$y' = f(x;y); \quad y(x_0) = y_0 \tag{9.6}$$

Dezvoltând în *serie Taylor* funcția $y(x)$ în jurul punctului x_0 se obține:

$$\begin{aligned} y(x) &= y(x_0) + \frac{x-x_0}{1!}y'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}y''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!}y'''(x_0) + \\ &\dots + \frac{(x-x_0)^{k-1}}{(k-1)!}y^{(k-1)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^k}{k!}y^{(k)}(\xi_0); \qquad \xi_0 \in [x_0,\ x] \end{aligned} \tag{9.7}$$

Derivând de două ori în raport cu x ecuația diferențială (9.6) $y' = f(x,y)$ şi ținând seama de relațiile de derivare cunoscute, se obține:

$$\begin{aligned} & y''(x) = \frac{df(x,y)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} \\ & \Rightarrow y''(x) = f_x + f_y f; \qquad unde: f_x = \frac{\partial f}{\partial x}; \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned} \tag{9.8}$$

$$y'''(x) = \frac{d}{dx}\left(f_x + f_x f\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dy}{dx} + \frac{\partial}{\partial x}\left(f_y f\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(f_y f\right)\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow y'''(x) = f_{xx} + 2f_{xy}f + f_x f_y + f f_y^2 + f^2 f_{yy}; \tag{9.8'}$$

$$unde: f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}; \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2};$$

Înlocuind în dezvoltarea (9.7) relațiile (9.8), (9.8') şi condițiile $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0) = f(x_0;y_0)$, considerând în locul intervalului dezvoltării $[x_0, x]$, intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ şi notând: $x_{i+1} - x_i = h$, $y(x_i)=y_i$ şi $y(x_{i+1})=y_{i+1}$, se obțin următoarele *formule de calcul iterativ ale soluției folosind metoda dezvoltării în serie Taylor:*

- pentru *k=2*: $y_{i+1} = y_i + hf_{\substack{x=xi \\ y=yi}} + 0(h^2)$ (9.9)

- pentru *k=3* : $y_{i+1} = y_i + hf_{\substack{x=xi \\ y=yi}} + \frac{h^2}{2}\left(f_x + f_y f\right)_{\substack{x=xi \\ y=yi}} + 0(h^3)$ (9.10)

- pentru *k=4:*
$$y_{i+1} = y_i + hf_{\substack{x=xi \\ y=yi}} + \frac{h^2}{2}\left(f_x + f_y f\right)_{\substack{x=xi \\ y=yi}} + \\ + \frac{h^3}{6}\left(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_x f_y + f f_y^2 + f^2 f_{yy}\right)_{\substack{x=xi \\ y=yi}} + 0(h^4); \quad (9.11)$$

Aplicaţia 9.1

Folosind metoda *dezvoltării în serie Taylor* pentru *k=3* şi *k=4* să se găsească soluţia ecuaţiei diferenţiale: $y' = 2xy^2,\ \ y(0) = \frac{1}{2}$, pentru intervalul [*0, 1*] dacă se consideră un pas al diviziunilor *h=0,1*.

Rezolvare

Pentru a avea un criteriu de comparaţie al rezultatelor obţinute se determină mai întâi soluţia exactă a ecuaţiei diferenţiale de ordinul I prin metoda separării variabilelor:

$$y' = 2xy^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y^2} = 2x \quad (9.12)$$

Integrând ecuaţia diferenţială cu variabile separate şi introducând condiţiile la limită se obţine soluţia exactă:

$$\int \frac{y'dx}{y^2} = \int 2xdx \ \Rightarrow -\frac{1}{y} = x^2 + C \ \Rightarrow y = \frac{1}{2 - x^2} \quad (9.13)$$

Folosind metoda *dezvoltării în serie Taylor* pentru *k=3* şi *k=4* se folosesc *formulele de calcul iterativ ale soluţiei* (9.10) respectiv (9.11), în care funcţia *f(x,y)* şi derivatele ei parţiale au expresiile:

$$\begin{aligned} & f(x;y) = 2xy^2; \\ & f_x = 2y^2; \quad f_y = 4xy \\ & f_{xx} = 0; \quad f_{yy} = 4x; \quad f_{xy} = 4y \end{aligned} \quad (9.14)$$

Se obţin astfel formulele:

- pentru *k=3:* $y_{i+1} = y_i + 2hx_i y_i^2 + h^2\left(y_i^2 + 4x_i^2 y_i^3\right)$ (9.15)
- pentru *k=4:* $y_{i+1} = y_i + 2hx_i y_i^2 + h^2\left(y_i^2 + 4x_i^2 y_i^3\right) + \frac{h^2}{6}\left(32x_i\, y_i^3 + 8x_i^2 y_i^3 + 32x_i^3 y_i^4\right)$

(9.16)

Considerând o diviziune a intervalului [*0, 1*] formată din 11 puncte şi înlocuind valorile numerice în relaţiile de mai sus se obţin rezultatele din tabelele 9.1 ($k=3$) respectiv 9.2 ($k=4$) iar şi în figurile 9.1, respectiv 9.2, s-au trasat graficele atât pentru soluţia obţinută numeric cât si pentru soluţia exactă.

Tabelul 9.1

Metoda dezvoltării în serie Taylor / k=3						*Valoarea exactă* y_i
x_i	y_i	f_i	f_{xi}	f_{yi}	y_{i+1}	
0	0.5	0	0.5	0	0.502500	0.500000
0.1	0.502500	0.050501	0.505013	0.201000	0.510126	0.502513
0.2	0.510126	0.104091	0.520457	0.408101	0.523350	0.510204
0.3	0.523350	0.164337	0.54779	0.628020	0.543038	0.523560
0.4	0.543038	0.235913	0.589782	0.868862	0.570603	0.543478
0.5	0.570603	0.325588	0.651177	1.141207	0.608276	0.571429
0.6	0.608276	0.444	0.739999	1.459862	0.659617	0.609756
0.7	0.659617	0.609132	0.870189	1.846927	0.730506	0.662252
0.8	0.730506	0.853823	1.067279	2.337620	0.831204	0.735294
0.9	0.831204	1.243621	1.381802	2.992336	0.981082	0.840336
1	0.981082					1.000000

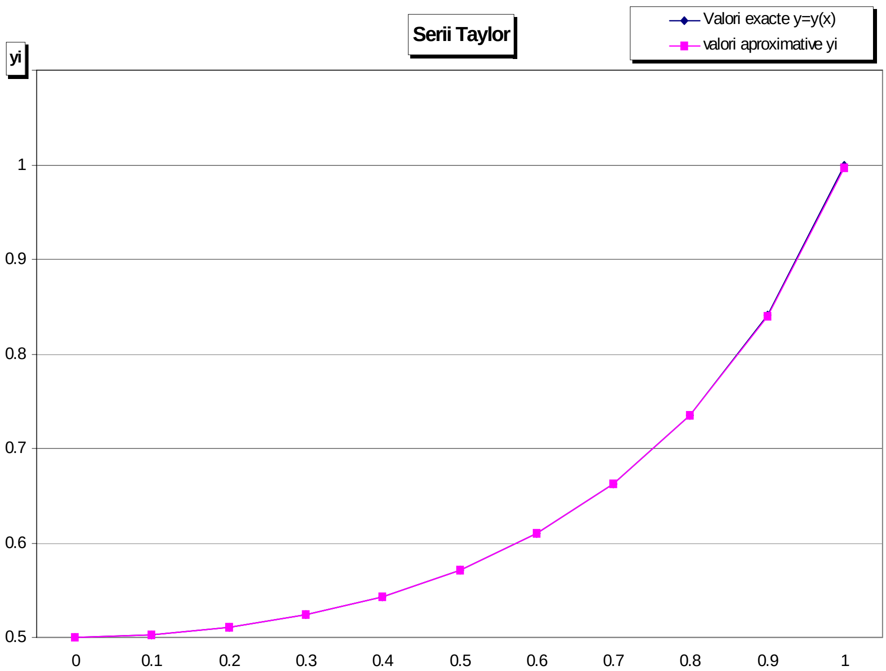


Fig. 9.1. Soluţia exactă şi cea aproximativă obţinută prin dezvoltări Taylor $k=3$

Se observă o bună apropiere a rezultatelor obţinute prin această metodă cu rezultatele exacte conform (9.13).

Tabelul 9.2

Metoda dezvoltării în serie Taylor / k=4									*Valoarea exactă* y_i
x_i	y_i	f_i	f_{xi}	f_{yi}	f_{xxi}	f_{yyi}	f_{xyi}	y_{i+1}	
0	0.500000	0.000000	0.500000	0	0	0	2.000000	0.502500	0.500000
0.1	0.502500	0.050501	0.505013	0.201	0	0.4	2.010000	0.510177	0.502513
0.2	0.510177	0.104112	0.520562	0.408142	0	0.8	2.040709	0.523514	0.510204
0.3	0.523514	0.16444	0.548134	0.628217	0	1.2	2.094057	0.543404	0.523560
0.4	0.543404	0.23623	0.590576	0.869446	0	1.6	2.173616	0.571308	0.543478
0.5	0.571308	0.326393	0.652786	1.142616	0	2	2.285233	0.609556	0.571429
0.6	0.609556	0.44587	0.743116	1.462933	0	2.4	2.438222	0.661902	0.609756
0.7	0.661902	0.613359	0.876227	1.853324	0	2.8	2.647606	0.734641	0.662252
0.8	0.734641	0.863516	1.079395	2.350851	0	3.2	2.938564	0.839001	0.735294
0.9	0.839001	1.267062	1.407847	3.020405	0	3.6	3.356006	0.996898	0.840336
1	0.996898								1.000000

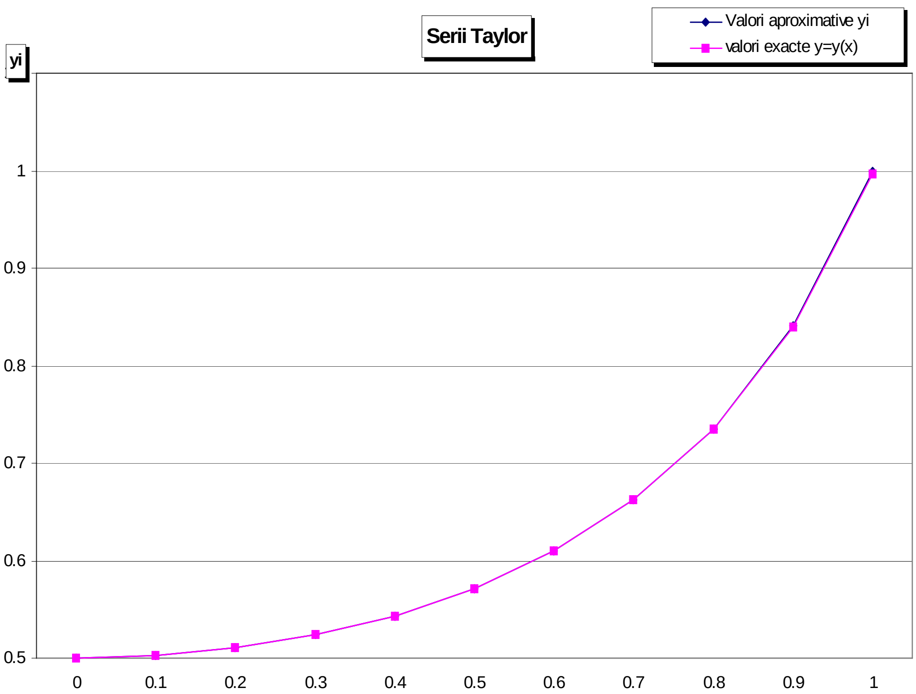


Fig. 9.2. Soluţia exactă şi cea aproximativă obţinută prin dezvoltări Taylor *k=4*

Se observă o mai bună apropiere a rezultatelor obţinute prin această metodă cu rezultatele exacte conform (9.13).

9.3. Metoda Euler

Pentru *k=2* în metoda dezvoltării în serie Taylor, rezultă relația pentru determinarea aproximativă a soluției prin *metoda Euler* :

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i; y_i) \tag{9.17}$$

Relația (9.17) se poate scrie sub forma generală:

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(x_i; y_i; h) \tag{9.18}$$

în care $\Phi(x_i, y_i, h)$ este o combinație de valori ale funcției de două variabile *f(x,y)* calculată în diferite puncte ale intervalului [$(x_i, y_i); (x_{i+1}, y_{i+1})$].

Întrucât soluțiile obținute prin metoda (9.17) sunt mai puțin precise se folosesc următoarele variante ale metodei *Euler:*

- *metoda Euler îmbunătățită* corespunzătoare funcției particulare:

$$\Phi(x_i; y_i; h) = \frac{1}{2} f(x_i; y_i) + \frac{1}{2} f(x_i + h; y_i + hf_i) \tag{9.19}$$

conduce la relația de calcul:

$$y_{i+1} = y_i + h\left[\frac{1}{2} f_i + \frac{1}{2} f(x_i + h; y_i + hf_i)\right] \tag{9.20}$$

- *metoda Euler modificată* corespunzătoare funcției particulare:

$$\Phi(x_i; y_i; h) = f(x_i + 0{,}5h; y_i + 0{,}5hf_i) \tag{9.21}$$

conduce la relația de calcul:

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f_i\right) \tag{9.22}$$

Aplicația 9.2

Folosind metoda *Euler, Euler îmbunătățită și Euler modificată* să se găsească soluția ecuației diferențiale: $y' = 2xy^2$, $y(0) = 1/2$, pentru intervalul [*0, 1*] dacă se consideră un pas al diviziunilor *h=0,1.*

Rezolvare

Soluția exactă a ecuației diferențiale este (9.13) $y = 1/(2 - x^2)$ și s-a determinat prin metoda separării variabilelor. Relațiile de calcul (9.17), (9.20) și (9.22) ale soluției prin metoda *Euler, Euler îmbunătățită și modificată* capătă formele particulare:

1. *Metoda Euler:* $y_{i+1} = y_i + 2hx_i y_i^2$ (9.23)
2. *Euler îmbunătățită:* $y_{i+1} = y_i + h\left[x_i y_i^2 + (x_i + h)(y_i + 2x_i y_i^2)^2\right]$ (9.24)
3. *Euler modificată:* $y_{i+1} = y_i + h\left[(x_i + 0{,}5h)(y_i + x_i y_i^2)^2\right]$ (9.25)

Considerând o diviziune a intervalului [*0, 1*] formată din 11 puncte şi înlocuind valorile numerice în relațiile (9.23), (9.24) şi (9.25) se obțin rezultatele din tabelele 9.3, 9.4 respectiv 9.5 iar în figurile 9.3, 9.4 şi respectiv 9.5 s-au trasat graficele atât pentru soluțiile aproximative cât şi pentru soluția exactă.

Tabelul 9.3.

Valori aproximative obținute prin metoda Euler						*Valori exacte*
xi	*yi*	*fi*	*xi+h*	*h*fi*	*yi+1*	
0	0.5	0	0.1	0	0.500000	0.500000
0.1	0.5	0.05	0.2	0.005	0.505000	0.502513
0.2	0.505	0.10201	0.3	0.010201	0.515201	0.510204
0.3	0.515201	0.159259	0.4	0.015926	0.531127	0.523560
0.4	0.531127	0.225677	0.5	0.022568	0.553695	0.543478
0.5	0.553695	0.306578	0.6	0.030658	0.584352	0.571429
0.6	0.584352	0.409761	0.7	0.040976	0.625328	0.609756
0.7	0.625328	0.54745	0.8	0.054745	0.680073	0.662252
0.8	0.680073	0.74	0.9	0.074	0.754073	0.735294
0.9	0.754073	1.023528	1	0.102353	0.856426	0.840336
1	0.856426					1.000000

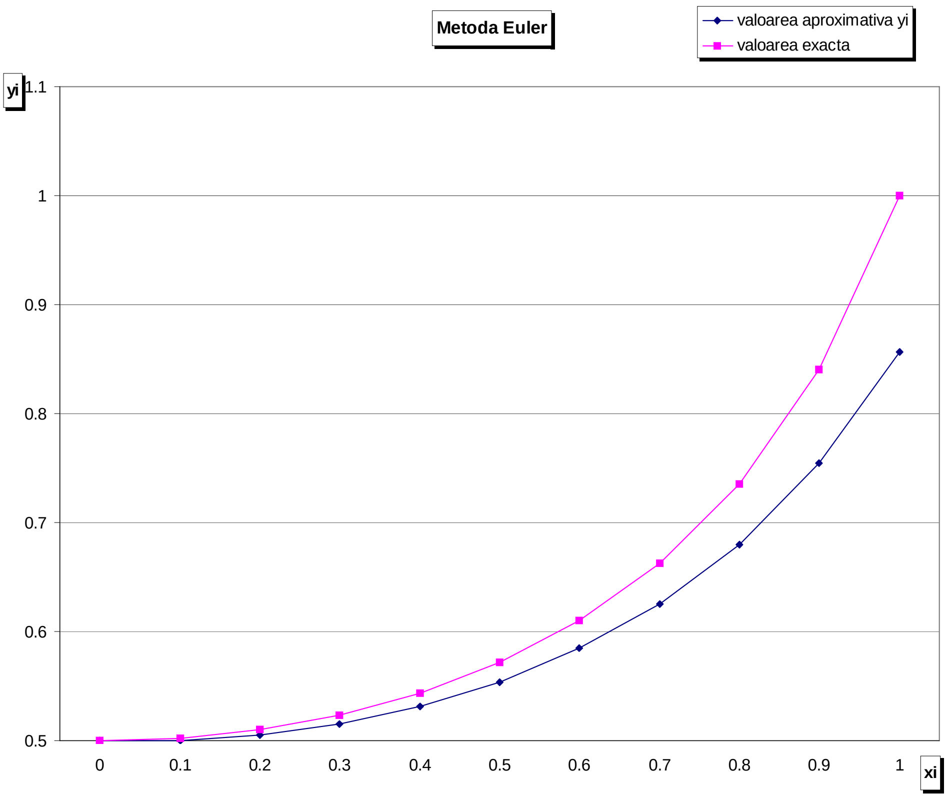


Fig. 9.3. Soluția exactă şi cea aproximativă obținută prin metoda *Euler*

Tabelul 9.4

Valori aproximative obținute prin metoda Euler imbunătățită						*Valoarea exactă*
xi	*yi*	*fi*	*xi+h*	*h*fi*	*yi+1*	
0	0.5	0	0.1	0	0.502500	0.500000
0.1	0.5025	0.050501	0.2	0.00505	0.510177	0.502513
0.2	0.510177	0.104112	0.3	0.010411	0.523513	0.510204
0.3	0.523513	0.16444	0.4	0.016444	0.543397	0.523560
0.4	0.543397	0.236225	0.5	0.023622	0.571284	0.543478
0.5	0.571284	0.326366	0.6	0.032637	0.609486	0.571429
0.6	0.609486	0.445767	0.7	0.044577	0.661720	0.609756
0.7	0.66172	0.613022	0.8	0.061302	0.734192	0.662252
0.8	0.734192	0.86246	0.9	0.086246	0.837895	0.735294
0.9	0.837895	1.263724	1	0.126372	0.994063	0.840336
1	0.994063					1.000000

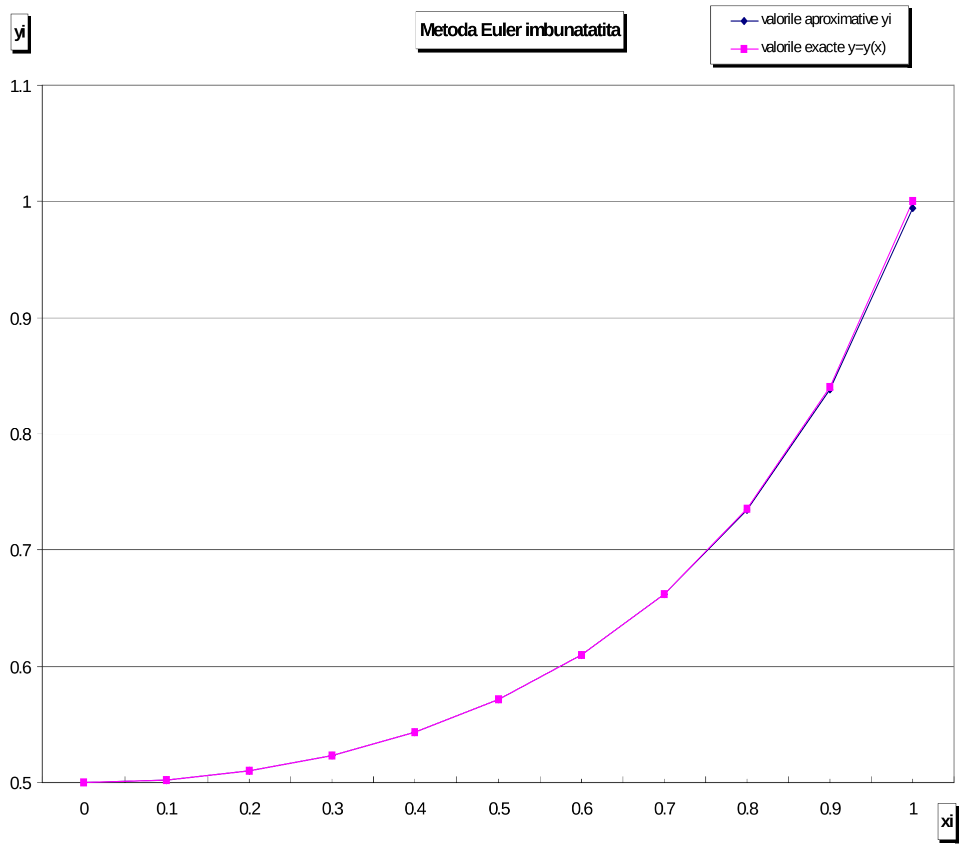


Fig.9.4. Soluția exactă şi cea aproximativă obținută prin *metoda Euler îmbunătățită*

Se observă din figura 9.4 *o apropiere foarte bună* a rezultatelor aproximative obținute prin această metodă de cele obținute prin integrare.

Tabelul 9.5

Valori aproximative obţinute prin metoda Euler modificată						Valori exacte
xi	*yi*	*fi*	*xi+h*	*h*fi*	*yi+1*	
0	0.5	0	0.1	0	0.502500	0.500000
0.1	0.5025	0.050501	0.2	0.00505	0.510152	0.502513
0.2	0.510152	0.104102	0.3	0.01041	0.523431	0.510204
0.3	0.523431	0.164388	0.4	0.016439	0.543217	0.523560
0.4	0.543217	0.236068	0.5	0.023607	0.570941	0.543478
0.5	0.570941	0.325974	0.6	0.032597	0.608875	0.571429
0.6	0.608875	0.444874	0.7	0.044487	0.660655	0.609756
0.7	0.660655	0.611051	0.8	0.061105	0.732320	0.662252
0.8	0.73232	0.858068	0.9	0.085807	0.834485	0.735294
0.9	0.834485	1.253458	1	0.125346	0.987415	0.840336
1	0.987415					1.000000

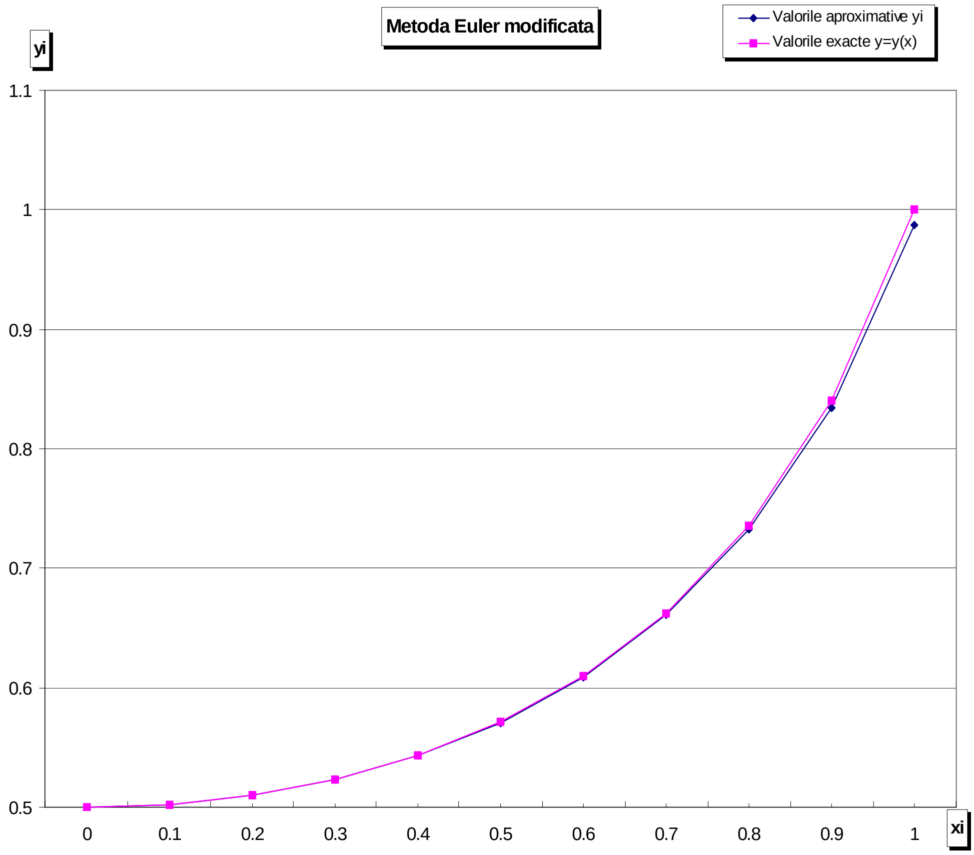


Fig.9.5.Soluţia exactă şi cea aproximativă obţinută prin *metoda Euler modificată*

Se observă din figura 9.5 *o apropiere bună* a rezultatelor aproximative obţinute prin această metodă de cele obţinute prin integrare.

9.4. Metoda Runge-Kutta

Metoda Runge-Kutta este o metodă unipas folosită des în rezolvarea numerică a ecuațiilor diferențiale ordinare.

Se consideră ecuația diferențială ordinară:

$$y' = f(x; y); \qquad y(x_0) = y_0 \tag{9.26}$$

şi o diviziune a intervalului [a, b] dată de punctele: $x_0=a, x_1, x_2, \ldots x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n=b$.

Metoda *Euler* furnizează o relație de calcul pe baza datelor corespunzătoare nodului x_i şi/sau a datelor corespunzătoare unor puncte situate în interiorul subintervalului [x_i, x_{i+1}] de forma:

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(x_i; y_i; h) \tag{9.27}$$

în care: $\Phi(x_i, y_i, h)$ este o combinație liniară de valori ale funcției $f(x,y)$ calculată în diferite noduri din intervalul [(x_i, y_i); (x_{i+1}, y_{i+1})].

Metoda *Runge-Kutta* furnizează o relație de calcul pe baza datelor corespunzătoare nodului x_i şi/sau a datelor corespunzătoare unor puncte situate în interiorul subintervalului [x_i, x_{i+1}] ca o combinație liniară de valori ale funcției $f(x,y)$ de forma:

$$\Phi(x_i; y_i; h) = \sum_{j=1}^{p} k_j w_j \tag{9.28}$$

în care: $w_1, w_2, \ldots w_p$ reprezintă *ponderile* din cadrul metodei *Runge-Kutta;*

$k_1, k_2, \ldots k_p$ reprezintă valorile funcției $f(x,y)$ în anumite noduri din intervalul [(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})], care se scriu sub forma:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i;\ y_i) \\ k_2 &= f(x_i + \alpha_2 h;\ y_i + \beta_2 hk_1) \\ k_3 &= f(x_i + \alpha_3 h;\ y_i + \beta_{31} hk_1 + \beta_{32} hk_2) \\ k_4 &= f(x_i + \alpha_4 h;\ y_i + \beta_{41} hk_1 + \beta_{42} hk_2 + \beta_{43} hk_3) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{9.29}$$

Coeficienții α_i , β_{ij} şi ponderile w_i se determină din condiția ca relația de identitate a soluției scrisă sub forma:

$$y_{i+1} = y_i + h(k_1 w_1 + k_2 w_2 + k_3 w_3 + k_4 w_4 + \ldots + k_p w_p) \tag{9.30}$$

şi soluția obținută prin dezvoltarea în serie Taylor a soluției în jurul punctului x_i:

$$y_{i+1} = y_i + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_y f) + \frac{h^3}{6}(f_{xx} + 2f_{xy} f + f_x f_y + f f_y^2 + f^2 f_{yy}) + \ldots \tag{9.31}$$

În funcție de numărul p de termeni ai relației (9.30) se obțin formule particulare de calcul a soluției prin metoda Runge-Kutta. Astfel:

1. Pentru $p=2$ se obține relația particulară:

$$y_{i+1} = y_i + h(k_1 w_1 + k_2 w_2) \tag{9.32}$$

în care k_1, k_2, w_1, w_2 au valorile:

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i\,; y_i) \\ k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2\lambda}; y_i + \frac{h}{2\lambda}k_1\right) \end{cases} ; \quad \begin{cases} w_1 = 1-\lambda \\ w_2 = \lambda \end{cases} \tag{9.33}$$

λ este un parametru oarecare având valori cuprinse între 0 şi 1.

Înlocuind aceste valori ale coeficienţilor şi ponderilor în relaţia (9.32) se obţine formula generală a *metodei Runge Kutta de ordinul II*:

$$y_{i+1} = y_i + h(1-\lambda)f(x_i\,; y_i) + h\lambda f\left(x_i + \frac{h}{2\lambda}; y_i + \frac{h}{2\lambda}f_i\right) \tag{9.34}$$

Se observă din relaţia (9.34) că dacă:

- $\lambda=0{,}5$ se obţine *metoda Euler îmbunătăţită :*

$$y_{i+1} = y_i + 0{,}5hf_i + 0{,}5\cdot f(x_i + h, y_i + hf_i) \tag{9.35}$$

- $\lambda=1$ se obţine *metoda Euler modificată:*

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i + 0{,}5h;\ y_i + 0{,}5f_i) \tag{9.36}$$

2. Pentru *p=3* se obţine relaţia particulară:

$$y_{i+1} = y_i + h(k_1w_1 + k_2w_2 + k_3w_3) \tag{9.37}$$

în care k_1, k_2, k_3, w_1, w_2 w_3 au valorile:

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i\,; y_i) \\ k_2 = f(x_i + 0{,}5h;\ y_i + 0{,}5hk_1) \\ k_3 = f(x_i + h;\ y_i + 2hk_1 - hk_2) \end{cases} \quad \left\{ w_1 = \frac{1}{6};\quad w_2 = \frac{2}{3};\quad w_3 = \frac{1}{6} \right. \tag{9.38}$$

Înlocuind aceste valori ale coeficienţilor şi ponderilor în relaţia (9.37) se obţine formula generală a *metoda Runge Kutta de ordinul III:*

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left[f(x_i\,; y_i) + 4f(x_i + 0{,}5h; y_i + 0{,}5hk_1) + f(x_i + h; y_i + 2hk_1 - hk_2)\right] \tag{9.39}$$

3. Pentru *p=4* se obţine relaţia particulară:

$$y_{i+1} = y_i + h(k_1w_1 + k_2w_2 + k_3w_3 + k_4w_4) \tag{9.40}$$

în care k_1, k_2, k_3, k_4, w_1, w_2 w_3, w_4 au valorile:

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i\,; y_i) \\ k_2 = f(x_i + 0{,}5h; y_i + 0{,}5hk_1) \\ k_3 = f(x_i + 0{,}5h; y_i + 0{,}5hk_2) \\ k_4 = f(x_i + h; y_i + hk_3) \end{cases} ; \quad \begin{cases} w_1 = \frac{1}{6};\quad w_2 = \frac{1}{3} \\ w_3 = \frac{1}{3};\quad w_4 = \frac{1}{6} \end{cases} \tag{9.41}$$

Înlocuind aceste valori ale coeficienţilor şi ponderilor în relaţia (9.40) se obţine formula genrală pentru *metoda Runge Kutta de ordinul IV:*

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left[f(x_i;y_i) + 2f(x_i + 0{,}5h; y_i + 0{,}5hk_1) + \right.$$
$$\left. + 2f(x_i + 0{,}5h; y_i + 0{,}5hk_2) + + f(x_i + h; y_i + hk_3)\right] \qquad (9.42)$$

Aceasta este cea mai utilizată dintre formulele metodei Runge Kutta, fiind cunoscută sub numele de *metoda Runge-Kutta.*

4. Pentru $p=6$ se obţine relaţia particulară:

$$y_{i+1} = y_i + h(k_1w_1 + k_2w_2 + k_3w_3 + k_4w_4 + k_5w_5 + k_6w_6) \qquad (9.43)$$

în care $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$, w_1, w_2 w_3, w_4 w_5, w_6 au valorile:

$$\begin{cases} w_1 = \dfrac{23}{192} \\ w_2 = 0 \\ w_3 = \dfrac{125}{192} \\ w_4 = 0 \\ w_5 = -\dfrac{81}{192} \\ w_6 = \dfrac{125}{192} \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f\left(x_i + \dfrac{h}{3}; y_i + \dfrac{h}{3}k_1\right) \\ k_3 = f(x_i + 0{,}4h; y_i + 0{,}16hk_1 + 0{,}24hk_2) \\ k_4 = f(x_i + h; y_i + 0{,}25hk_1 - 3hk_2 + 3{,}75hk_3) \\ k_5 = f\left(x_i + \dfrac{2h}{3}; y_i + \dfrac{6}{81}hk_1 + \dfrac{90}{81}hk_2 - \dfrac{50}{81}hk_3 + \dfrac{8}{81}hk_4\right) \\ k_6 = f\left(x_i + \dfrac{4h}{5}; y_i + \dfrac{6}{75}hk_1 + \dfrac{36}{75}hk_2 + \dfrac{10}{75}hk_3 + \dfrac{8}{75}hk_4\right) \end{cases} \qquad (9.44)$$

Înlocuind aceste valori în relaţia (9.43) se obţine formula genrală pentru *metoda Runge Kutta de ordinul VI:*

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{192}\left[23f(x_i;y_i) + 125f(x_i + 0{,}4h; y_i + 0{,}16hk_1 + 0{,}24hk_2) - \right.$$
$$-81f\left(x_i + \frac{2h}{3}; y_i + \frac{6}{81}hk_1 + \frac{90}{81}hk_2 - \frac{50}{81}hk_3 + \frac{8}{81}hk_4\right) + \qquad (9.45)$$
$$\left. +125f\left(x_i + \frac{4h}{5}; y_i + \frac{6}{75}hk_1 + \frac{36}{75}hk_2 + \frac{10}{75}hk_3 + \frac{8}{75}hk_4\right)\right]$$

Aplicaţia 3

Folosind metoda Runge Kutta de ordinul III şi IV şi VI să se găsească soluţia ecuaţiei diferenţiale: $y' = 2xy, \quad y(0) = 2$, pentru intervalul [*0, 1*] şi un pas al diviziunilor $h=0,1$.

Rezolvare

Soluţia exactă a ecuaţiei diferenţiale este $y = 2e^{x^2}$ şi s-a determinat prin metoda separării variabilelor. Relaţiile de calcul numeric al soluţiei prin metoda Runge Kutta de ordinul III şi IV şi VI sunt (9.39), (9.42) respectiv (9.45).

Considerând o diviziune a intervalului [*0, 1*] formată din 11 puncte şi înlocuind valorile numerice în relațiile (9.39), (9.42) şi (9.45) se obțin rezultatele din tabelele 9.6, 9.7 respectiv 9.8 iar în figurile 9.6, 9.7 şi respectiv 9.8 s-au trasat graficele atât pentru soluțiile aproximative cât şi pentru soluția exactă.

Tabelul 9.6

Valori aproximative obținute pein metoda Runge Kutta de ordinul III							*valoari exacte y_i*
xi	*yi*	*fi*	*k1*	*k2*	*k3*	*yi+1*	
0	2	0	0	0.2	0.396000	2.019933	2.000000
0.1	2.019933	0.403987	0.403987	0.61204	0.815811	2.081066	2.020100
0.2	2.081066	0.832426	0.832426	1.061344	1.284850	2.18711	2.081622
0.3	2.18711	1.312266	1.312266	1.576906	1.833498	2.344667	2.188349
0.4	2.344667	1.875733	1.875733	2.194608	2.500352	2.563909	2.347022
0.5	2.563909	2.563909	2.563909	2.961314	3.336671	2.859673	2.568051
0.6	2.859673	3.431607	3.431607	3.940629	4.412703	3.25312	2.866659
0.7	3.25312	4.554367	4.554367	5.221257	5.826988	3.774226	3.264632
0.8	3.774226	6.038762	6.038762	6.929479	7.720255	4.465508	3.792962
0.9	4.465508	8.037915	8.037915	9.3.248068	10.2965688	5.387621	4.495816
1	5.387621						5.436564

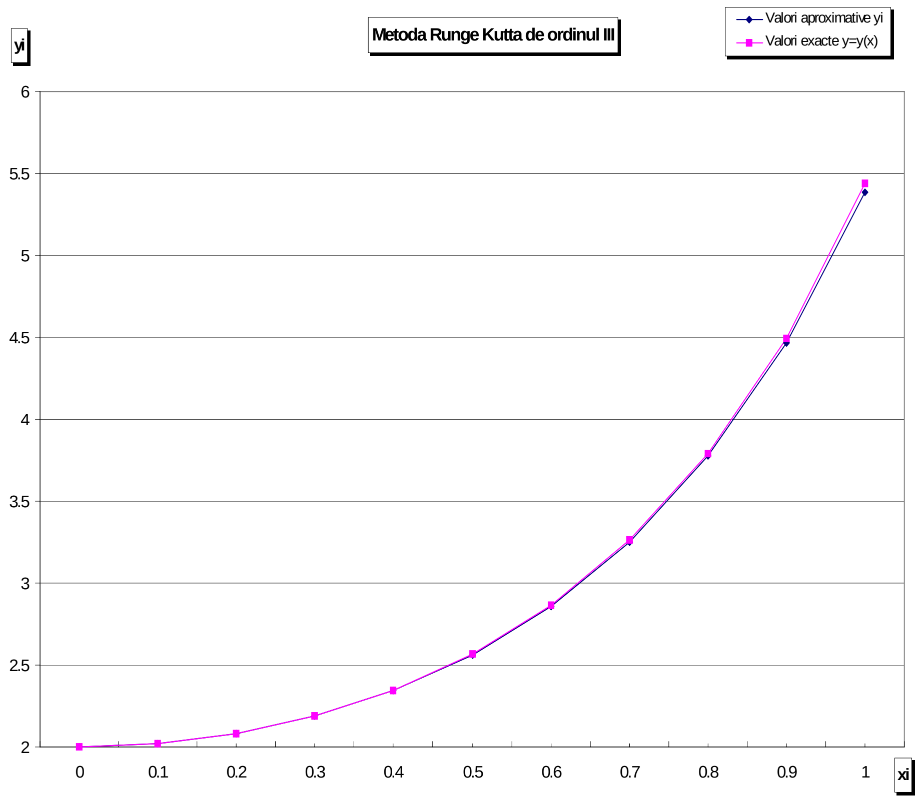


Fig. 9.6. Soluția exactă şi cea aproximativă obținută prin *metoda RK de ordinul III*

Tabelul 9.7

Valori aproximative obținute pein metoda Runge Kutta de ordinul IV							*valoari exacte y_i*
xi	*yi*	*k1*	*k2*	*k3*	*k4*	*yi+1*	
0	2.000000	0	0.2	0.201000	0.40402	2.0201003	2.000000
0.1	2.020100	0.40402	0.61209	0.615211	0.832649	2.0816215	2.020100
0.2	2.081622	0.832649	1.061627	1.067351	1.313014	2.1883485	2.081622
0.3	2.188349	1.313009	1.577799	1.587067	1.877644	2.3470216	2.188349
0.4	2.347022	1.877617	2.196812	2.211176	2.568139	2.5680505	2.347022
0.5	2.568051	2.568051	2.966098	2.987991	3.44022	2.866658	2.568051
0.6	2.866658	3.43999	3.950255	3.983422	4.571	3.2646304	2.866659
0.7	3.264630	4.570483	5.239732	5.289925	6.069797	3.7929569	3.264632
0.8	3.792957	6.068731	6.963869	7.039956	8.094514	4.4958052	3.792962
0.9	4.495805	8.092449	9.3.310813	9.3.426557	10.87692	5.4365404	4.495816
1	5.436540						5.436564

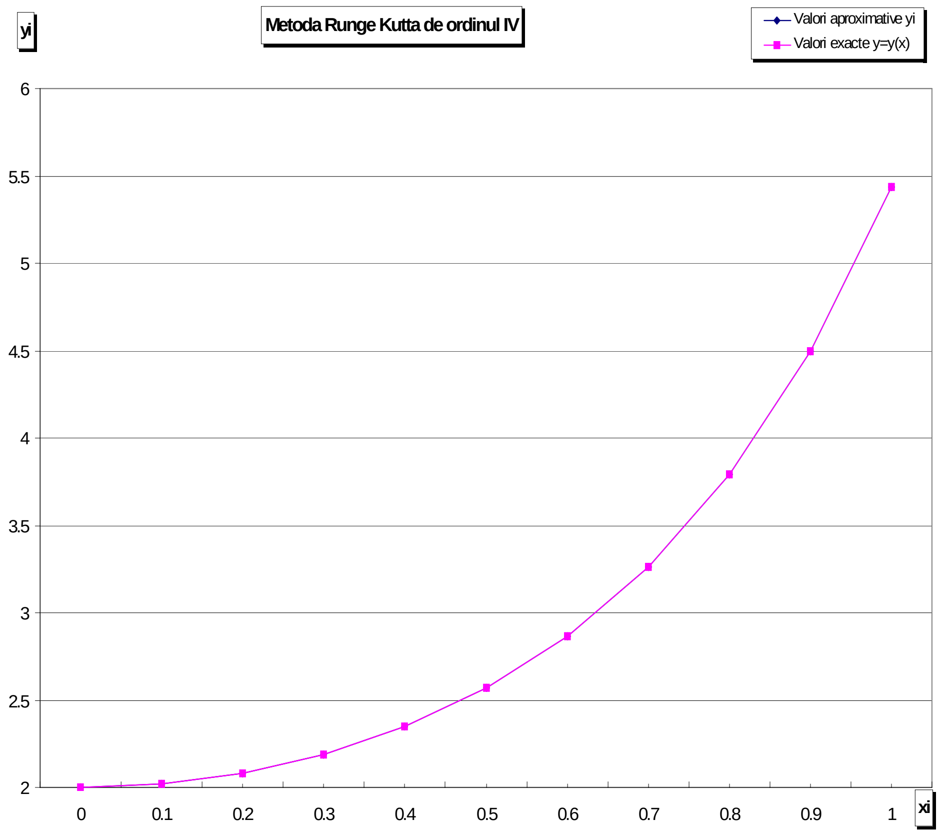


Fig. 9.7. Soluția exactă şi cea aproximativă obținută prin *metoda RK de ordinul IV*

Se observă din figura 9.7 *o apropiere foarte bună* a rezultatelor aproximative obținute prin metoda *Runge Kutta de ordinul IV* de valorile exacte.

Tabelul 9.8

Valori aproximative obţinute pein metoda Runge Kutta de ordinul VI								
xi	*yi*	*k1*	*k2*	*k3*	*k4*	*k5*	*k6*	*yi+1*
0	2	0	0.133333	0.160256	0.4040192	0.267855	0.322055	2.020100
0.1	2.020100	0.4040201	0.542285	0.571082	0.8326685	0.6854396	0.743709	2.081622
0.2	2.081622	0.8326486	0.984376	1.016913	1.3130805	1.145259	1.211335	2.188349
0.3	2.188349	1.3130092	1.488077	1.526648	1.877795	1.6776651	1.756106	2.347022
0.4	2.347022	1.8776175	2.088328	2.135922	2.5684345	2.320721	2.417432	2.568051
0.5	2.568051	2.568051	2.830563	2.891239	3.4407577	3.124704	3.247668	2.866659
0.6	2.866659	3.4399909	3.776346	3.855784	4.5719438	4.1585041	4.318845	3.264633
0.7	3.264633	4.5704859	5.011574	5.117897	6.0714144	5.5190415	5.732614	3.792962
0.8	3.792962	6.0687397	6.658756	6.803785	8.0972524	7.3454574	7.635268	4.495817
0.9	4.495817	8.0924703	8.895723	9.3.09693	10.881523	9.3.840874	10.24083	5.436565
1	5.436565							

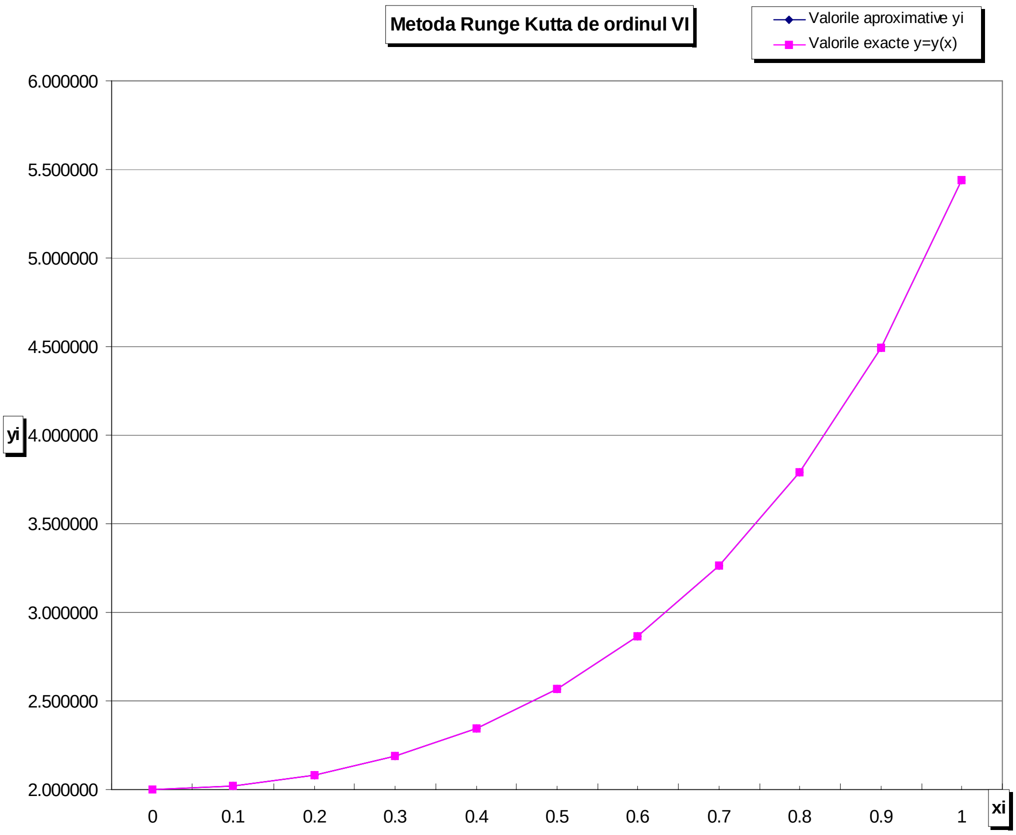


Fig. 9.8. Soluţia exactă şi cea aproximativă obţinută prin *metoda RK de ordinul VI*

Se observă din figura 9.8 *o apropiere foarte bună* a rezultatelor aproximative obţinute prin *metoda Runge Kutta de ordinul VI* de valorile exacte.

9.5. Metoda Runge-Kutta pentru rezolvarea ecuațiilor diferențiale de ordinul II

Se consideră ecuația diferențială ordinară de ordinul II de forma:

$$y'' = f(x; y; y'); \quad y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y'_0 \tag{9.46}$$

Se notează: $z = y'(x), \quad z(x_0) = y'(x_0) = y'_0$ (9.47)

Ecuația diferențială (9.46) se transformă într-un sistem de două ecuații diferențiale de ordinul I cu condițiile la limită:

$$\begin{cases} y' = z(x) \\ z' = f(x; y; z) \end{cases}; \qquad \begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ z(x_0) = y'_0 \end{cases} \tag{9.48}$$

Folosind formulele metodei Runge-Kutta de ordinul IV se determină soluția aproximativă pentru fiecare din ecuațiile (9.48) cu ajutorul relațiilor:

$$\begin{cases} z_{i+1} = z_i + \dfrac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{6}\left(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4\right) \end{cases} \tag{9.49}$$

în care $k_1, k_2, k_3, k_4, l_1, l_2, l_3, l_4$ au expresiile:

$$\begin{cases} k_1 = f\left(x_i; y_i; z_i\right) \\ k_2 = f\left(x_i + \dfrac{h}{2};\ y_i + \dfrac{h}{2}l_1;\ z_i + \dfrac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 = f\left(x_i + \dfrac{h}{2};\ y_i + \dfrac{h}{2}l_2;\ z_i + \dfrac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 = f\left(x_i + h;\ y_i + hl_3;\ z_i + hk_3\right) \end{cases}; \qquad \begin{cases} l_1 = z_i \\ l_2 = z_i + \dfrac{hk_1}{2} \\ l_3 = z_i + \dfrac{hk_2}{2} \\ l_4 = z_i + hk_3 \end{cases} \tag{9.50}$$

După înlocuirea expresiilor lui l_1, l_2, l_3 şi l_4 date de relațiile (9.50) în relațiile pentru k_1, k_2, k_3, k_4 rezultă următoarele *formule de calcul* a soluției aproximative a sistemului de ecuații diferențiale (9.48) prin *metoda Runge Kutta:*

$$\begin{cases} z_{i+1} = z_i + \dfrac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \\ y_{i+1} = y_i + z_i h + \dfrac{h^2}{6}\left(k_1 + k_2 + k_3\right) \end{cases} \tag{9.51}$$

în care k_1, k_2, k_3, k_4, au noile expresii:

$$k_1 = f\left(x_i; y_i; z_i\right) \qquad k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2};\ y_i + \frac{h}{2}z_i + \frac{h^2}{2}k_2;\ z_i + \frac{h}{2}k_2\right)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2};\ y_i + \frac{h}{2}z_i;\ z_i + \frac{h}{2}k_1\right) \qquad k_4 = f\left(x_i + h;\ y_i + hz_i + \frac{h^2}{2}k_3;\ z_i + hk_3\right) \tag{9.52}$$

Aplicația 9.4

Folosind *metoda Runge Kutta de ordinul IV* să se găsească soluția ecuației diferențiale de ordinul II cu condiții la limită pentru intervalul [*1, 2*] şi un pas al diviziunilor constant: *h=0,1*:

$$y'' - y' + \frac{y}{x} = 0, \quad y(1) = e, \; y'(1) = 2e \tag{9.53}$$

Rezolvare

Ecuația diferențială de ordinul II este echivalentă cu următorul sistem de două ecuații diferențiale de ordinul I şi condițiile la limită:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x,y,z) \end{cases} \qquad \begin{cases} y(1) = e \\ z(1) = 2e \end{cases}$$
$$\text{unde} \;\; f(x,y,z) = z + \frac{y}{x} \tag{9.54}$$

Considerăm o diviziune a intervalului formată din 11 puncte; înlocuind valorile numerice în relațiile de mai sus, se obțin rezultatele din tabelelul 9.9, iar în tabelul 9.10 sunt date valorile exacte calculate pentru soluția ecuației diferențiale care se obține prin integrare directă:

$$\begin{aligned} & y(x) = xe^{x}, \\ & y'(x) = z(x) = (x+1)e^{x}, \\ & y(1) = e, \quad y'(1) = 2e \end{aligned} \tag{9.55}$$

În figura 9.9 s-au trasat graficele pentru valorile celor două soluții obținute: soluția numerică obținută prin *metoda Runge Kutta de ordinul IV* si cea exactă, obținută prin integrare directă.

Tabelul 9.9

Metoda Runge Kutta IV pentru ecuatii diferentiale de ordinul II								
xi	*zi*	*yi*	*k1*	*k2*	*k3*	*k4*	*yi+1*	*zi+1*
1	5.436564	2.7182818	8.154845	8.69203	8.760280	9.4.3178094	3.304617	6.3095182
1.1	6.309518	3.304617	9.4.31371	9.4.92311	9.4.99672	10.630484	3.984291	7.305916
1.2	7.305916	3.984291	10.62616	11.31689	11.396698	12.116252	4.770449	8.4420759
1.3	8.442076	4.770449	12.11165	12.89399	12.980867	13.796992	5.677967	9.4.73638
1.4	9.473638	5.677967	13.79207	14.67756	14.772449	15.697272	6.723676	11.209538
1.5	11.20954	6.723676	15.69199	16.69359	16.797521	17.844676	7.926601	12.884853
1.6	12.88485	7.926601	17.83898	18.97125	19.4.0853	20.270161	9.430824	14.788559
1.7	14.78856	9.430824	20.264	21.54329	21.668804	23.008465	10.8929	16.95017
1.8	16.95017	10.892895	23.00178	24.44642	24.584727	26.098556	12.70797	19.4402
1.9	19.44028	12.707967	26.09128	27.72186	27.874471	29.4.584141	14.7844	22.184015
2	22.18402	14.784401						

Tabelul 9.10

xi	*Valorile exacte* z_i	*Valorile exacte* y_i	*Valorile aproximative* y_i
1	5.436564	2.7182818	2.7182818
1.1	6.308749	3.3045826	3.304617
1.2	7.304257	3.9841403	3.984291
1.3	8.439382	4.7700857	4.770449
1.4	9.4.73248	5.67728	5.677967
1.5	11.20422	6.7225336	6.723676
1.6	12.87788	7.9248519	7.926601
1.7	14.77966	9.4.3057106	9.4.308246
1.8	16.93901	10.889365	10.892895
1.9	19.4.38909	12.703199	12.707967
2	22.16717	14.778112	14.784401

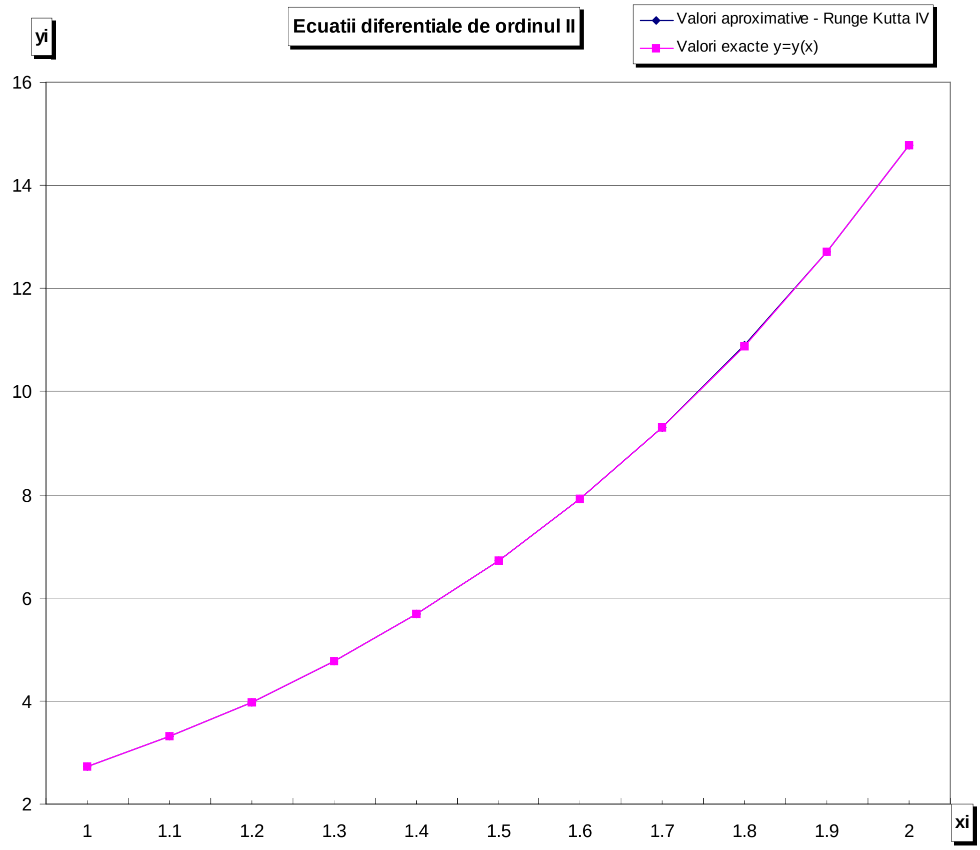


Fig. 9.9. Soluția exactă şi cea aproximativă obținută prin *metoda RK de ordinul IV*

Se observă din figura 9.9 *o apropiere foarte bună* a rezultatelor aproximative obținute prin *metoda Runge Kutta de ordinul VI* de valorile exacte.

9.6. Metoda Adams

Metoda *Adams* este o *metodă multipas* pentru determinarea soluţiei ecuaţiei diferenţiale de ordinul I la care soluţia se determină prin iteraţii succesive pentru subintervalele [x_i, x_{i+1}] astfel încât soluţia y_{i+1} se determină pe baza datelor corespunzătoare nodurilor x_0, x_1, x_2, ... x_i şi/sau a datelor corespunzătoare unor puncte situate în toate subintervalele. Metoda *Adams* utilizează pentru aproximarea funcţiei *f(x,y) polinomul de interpolare Newton cu diferenţe finite regresive.*

Se consideră ecuaţia diferenţială ordinară de ordinul I cu condiţii la limită:

$$y' = f(x,y); \quad y(x_0) = y_0 \tag{9.56}$$

şi o diviziune a intervalului [*a*, *b*] formată din nodurile:

$$x_0=a,\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_i,\ x_{i+1},\ \dots,\ x_n=b \tag{9.57}$$

Dacă se integrează ecuaţia diferenţială (9.56) pe intervalul [x_i, x_{i+1}] şi se aproximează funcţia *f(x,y)* cu *polinomul de interpolare Newton cu diferenţe regresive Q(x)*, se obţine:

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y(x))dx \cong \int_{x_i}^{x_{i+1}} Q(x)dx \tag{9.58}$$

Polinomul de interpolare Newton cu diferenţe regresive P(x) care interpolează funcţia *f(x, y(x))* în jurul punctului (x_{i+1}, y_{i+1}) are expresia:

$$\begin{aligned} Q(x) = \Bigg(& f_{i+1} + \alpha\nabla f_{i+1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}\nabla^2 f_{i+1} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3!}\nabla^3 f_{i+1} + \\ & + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{4!}\nabla^4 f_{i+1} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)}{5!}\nabla^5 f_{i+1} + \dots \Bigg) \end{aligned} \tag{9.59}$$

În relaţia (9.59) s-a făcut schimbarea de variabilă:

$$\alpha = \frac{x_{i+1} - x}{h}; \quad h d\alpha = -dx; \tag{9.60}$$

Cu schimbarea de variabilă (9.60) limitele de integrare din (9.58) devin:

$$x = x_i \Rightarrow \alpha = -1; \quad x = x_{i+1} \Rightarrow \alpha = 0 \tag{9.61}$$

Ţinând seama de relaţiile (9.60) şi (9.61) integrala (9.58) se scrie:

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} Q(x)dx = -h\int_{-1}^{0} \Bigg(& f_{i+1} + \alpha\nabla f_{i+1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}\nabla^2 f_{i+1} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3!}\nabla^3 f_{i+1} + \\ & + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{4!}\nabla^4 f_{i+1} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)}{5!}\nabla^5 f_{i+1} + \dots \Bigg) d\alpha \end{aligned} \tag{9.62}$$

Efectuând calculele pentru integralele din relaţia (9.62) se obţine *formula Adams* pentru determinarea soluţiei aproximative a ecuaţiei diferenţiale de ordinul I cu condiţii la limită:

$$y_{i+1} = y_i + h\left(f_{i+1} + \frac{1}{2}\nabla f_{i+1} + \frac{5}{12}\nabla^2 f_{i+1} + \frac{3}{8}\nabla^3 f_{i+1} + \frac{251}{720}\nabla^4 f_{i+1} + \frac{475}{288}\nabla^5 f_{i+1} + \dots \right) \tag{9.63}$$

Dacă se rețin primele cinci diferențe finite regresive în relația (9.5.8), este necesar şi suficient să se calculeze valorile funcției $f_i=f(x_i, y_i)$ în primele şase puncte (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_5, y_5), pentru a putea determina aceste diferențe finite:

$$\begin{aligned}
&\nabla f_5 = f_5 - f_4\\
&\nabla^2 f_5 = f_5 - 2f_4 + f_3\\
&\nabla^3 f_5 = f_5 - 3f_4 + 3f_3 - f_2\\
&\nabla^4 f_5 = f_5 - 4f_4 + 6f_3 - 4f_2 + f_1\\
&\nabla^5 f_5 = f_5 - 5f_4 + 10f_3 - 10f_2 + 5f_1 - f_0
\end{aligned} \tag{9.64}$$

Primele cinci valori ale soluției y_i se determină fie printr-o metodă unipas (*Taylor, Euler, Runge Kutta,* etc.) fie printr-o metodă multipas cu ajutorul polinomului de interpolare *Gregory-Newton cu diferențe progresive.*

Astfel, dacă se integrează ecuația diferențială (9.5.1) pe intervalul $[x_0, x_i]$ şi se aproximează funcția $f(x,y)$ cu polinomul de interpolare $P(x)$ se obține:

$$y_i - y_0 = \int_{x_0}^{x_i} f(x, y(x))dx \cong \int_{x_0}^{x_i} P(x)dx \tag{9.65}$$

în care $P^*(x)$ este polinomul de interpolare Gregory-Newton cu diferențe progresive care interpolează funcția $f(x, y(x))$ în jurul punctului (x_0, y_0):

$$\begin{aligned}
P(x) = f_0 + \alpha\Delta f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\Delta^3 f_0 +\\
+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}\Delta^4 f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{5!}\Delta^5 f_0 + \dots
\end{aligned} \tag{9.66}$$

În relația (9.66) s-a notat: $$\alpha = \frac{x - x_0}{h}; \quad hd\alpha = dx; \tag{9.67}$$

Cu schimbarea de variabilă (9.67) limitele de integrare (9.65) devin:

$$x_i = x_0 + ih; \quad x = x_0 \Rightarrow \alpha = 0; \quad x = x_i \Rightarrow \alpha = i \tag{9.68}$$

Ținând seama de relațiile (9.66) şi (9.68) se obține integrala (9.5.10):

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_i} P(x)dx = h\int_0^i\Bigg(f_0 + \alpha\Delta f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\Delta^3 f_0 +\\
+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}\Delta^4 f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{5!}\Delta^5 f_0 + \dots\Bigg)d\alpha
\end{aligned} \tag{9.69}$$

Pentru determinarea valorilor soluției y_i în primele cinci puncte ale intervalului cu ajutorul relația (9.69) se procedează astfel :

- *aproximația 1* ($i=1$):

$$y_1^{(1)} = y_0 + h\int_0^1 (f_0)d\alpha = y_0 + hf_0 \tag{9.70}$$

- *aproximația 2* (*i=1 și i=2*):

$$y_1^{(2)} = y_0 + h\int_0^1 (f_0 + \alpha\Delta f_0)d\alpha = y_0 + h\left(f_0 + \frac{1}{2}\Delta f_0\right);$$

$$y_2^{(2)} = y_0 + h\int_0^2 (f_0 + \alpha\Delta f_0)d\alpha = y_0 + 2h(f_0 + \Delta f_0); \tag{9.71}$$

$$unde: \quad \Delta f_0 = f\left(x_1, y_1^{(1)}\right) - f(x_0, y_0);$$

- *aproximația 3* (*i=1,2,3*):

$$y_1^{(3)} = y_0 + h\int_0^1 \left(f_0 + \alpha\Delta f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\Delta^2 f_0\right)d\alpha = y_0 + h\left(f_0 + \frac{1}{2}\Delta f_0 - \frac{1}{12}\Delta^2 f_0\right);$$

$$y_2^{(3)} = y_0 + h\int_0^2 \left(f_0 + \alpha\Delta f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\Delta^2 f_0\right)d\alpha = y_0 + 2h\left(f_0 + \Delta f_0 + \frac{1}{6}\Delta^2 f_0\right); \tag{9.72}$$

$$y_3^{(3)} = y_0 + h\int_0^3 \left(f_0 + \alpha\Delta f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\Delta^2 f_0\right)d\alpha = y_0 + 3h\left(f_0 + \frac{3}{2}\Delta f_0 + \frac{3}{4}\Delta^2 f_0\right);$$

în care diferențele finite progresive se determină astfel:

$$\begin{aligned} &\Delta f_0 = f\left(x_1, y_1^{(2)}\right) - f(x_0, y_0); \\ &\Delta^2 f_0 = f\left(x_2, y_2^{(2)}\right) - 2f\left(x_1, y_1^{(2)}\right) + f(x_0, y_0); \end{aligned} \tag{9.73}$$

- *aproximația 4* (*i=1,2,3,4*):

$$\begin{aligned}
y_1^{(4)} &= y_0 + h\int_0^1 \left(f_0 + \alpha\Delta f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2}\Delta^3 f_0\right)d\alpha = \\
&= y_0 + h\left(f_0 + \frac{1}{2}\Delta f_0 - \frac{1}{12}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{24}\Delta^3 f_0\right); \\
y_2^{(4)} &= y_0 + h\int_0^2 \left(f_0 + \alpha\Delta f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2}\Delta^3 f_0\right)d\alpha = \\
&= y_0 + 2h\left(f_0 + \Delta f_0 + \frac{1}{6}\Delta^2 f_0\right); \\
y_3^{(4)} &= y_0 + h\int_0^3 \left(f_0 + \alpha\Delta f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2}\Delta^3 f_0\right)d\alpha = \\
&= y_0 + 3h\left(f_0 + \frac{3}{2}\Delta f_0 + \frac{3}{4}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{8}\Delta^3 f_0\right); \\
y_4^{(4)} &= y_0 + h\int_0^4 \left(f_0 + \alpha\Delta f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2}\Delta^3 f_0\right)d\alpha = \\
&= y_0 + 4h\left(f_0 + 2\Delta f_0 + \frac{5}{3}\Delta^2 f_0 + \frac{2}{3}\Delta^3 f_0\right);
\end{aligned} \tag{9.74}$$

în care diferențele finite progresive se determină cu ajutorul relațiilor:

$$\begin{aligned}&\Delta f_0 = f\left(x_1, y_1^{(3)}\right) - f\left(x_0, y_0\right);\\&\Delta^2 f_0 = f\left(x_2, y_2^{(3)}\right) - 2f\left(x_1, y_1^{(3)}\right) + f\left(x_0, y_0\right);\\&\Delta^3 f_0 = f\left(x_3, y_3^{(3)}\right) - 3f\left(x_2, y_2^{(3)}\right) + 3f\left(x_1, y_1^{(3)}\right) - f\left(x_0, y_0\right);\end{aligned} \qquad (9.75)$$

- *aproximația 5 (i=1,2,3,4,5):*

$$\begin{aligned}&y_1^{(5)} = y_0 + h\int_0^1\left(f_0 + \alpha\Delta f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2}\Delta^3 f_0 +\right.\\&\left.+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{2}\Delta^4 f_0\right)d\alpha = y_0 + h\left(f_0 + \frac{1}{2}\Delta f_0 - \frac{1}{12}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{24}\Delta^3 f_0 - \frac{19}{720}\Delta^4 f_0\right);\\&y_2^{(5)} = y_0 + h\int_0^2\left(f_0 + \alpha\Delta f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2}\Delta^3 f_0 +\right.\\&\left.+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{2}\Delta^4 f_0\right)d\alpha = y_0 + 2h\left(f_0 + \Delta f_0 + \frac{1}{6}\Delta^2 f_0 - \frac{1}{180}\Delta^4 f_0\right);\\&y_3^{(5)} = y_0 + h\int_0^3\left(f_0 + \alpha\Delta f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2}\Delta^3 f_0 +\right.\\&\left.+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{2}\Delta^4 f_0\right)d\alpha = y_0 + 3h\left(f_0 + \frac{3}{2}\Delta f_0 + \frac{3}{4}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{8}\Delta^3 f_0 - \frac{1}{80}\Delta^4 f_0\right)\\&y_4^{(5)} = y_0 + h\int_0^4\left(f_0 + \alpha\Delta f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2}\Delta^3 f_0 +\right.\\&\left.+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{2}\Delta^4 f_0\right)d\alpha = y_0 + 4h\left(f_0 + 2\Delta f_0 + \frac{5}{3}\Delta^2 f_0 + \frac{2}{3}\Delta^3 f_0 + \frac{7}{90}\Delta^4 f_0\right);\\&y_5^{(5)} = y_0 + h\int_0^5\left(f_0 + \alpha\Delta f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2}\Delta^3 f_0 +\right.\\&\left.+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{2}\Delta^4 f_0\right)d\alpha = y_0 + 5h\left(f_0 + \frac{5}{2}\Delta f_0 + \frac{35}{12}\Delta^2 f_0 + \frac{15}{8}\Delta^3 f_0 + \frac{85}{144}\Delta^4 f_0\right);\end{aligned} \qquad (9.76)$$

în care diferențele finite progresive se determină astfel:

$$\begin{aligned}&\Delta f_0 = f\left(x_1, y_1^{(4)}\right) - f\left(x_0, y_0\right);\\&\Delta^2 f_0 = f\left(x_2, y_2^{(4)}\right) - 2f\left(x_1, y_1^{(4)}\right) + f\left(x_0, y_0\right);\\&\Delta^3 f_0 = f\left(x_3, y_3^{(4)}\right) - 3f\left(x_2, y_2^{(4)}\right) + 3f\left(x_1, y_1^{(4)}\right) - f\left(x_0, y_0\right);\\&\Delta^4 f_0 = f\left(x_4, y_4^{(4)}\right) - 4f\left(x_3, y_3^{(4)}\right) + 6f\left(x_2, y_2^{(4)}\right) - 4f\left(x_1, y_1^{(4)}\right) + f\left(x_0, y_0\right);\end{aligned} \qquad (9.77)$$

Observație

Pentru fiecare din cele cinci aproximari succesive s-au folosit rezultatele obținute la aproximarea precedentă. Această metodă este deci o metoda multipas care foloseşte atât rezultatele obținute anterior cât şi toate punctele anterioare.

Aplicaţia 9. 5

Folosind metoda Adams să se rezolve ecuaţia diferenţială cu condiţii la limită: $y' = 2xy;\ y(1) = e$ pentru intervalul [*1, 2*] cu un pas al diviziunilor constant *h=0,1.*

Rezolvare

Folosind polinomul de interpolare Newton cu diferenţe progresive şi relaţiile (9.70) ... (9.77) se determină valorile aproximative ale soluţiei în primele cinci noduri: y_0, y_1, y_2, y_3 şi y_4 . Rezultatele obţinute sunt date în tabelul 9.11.

Se calculează apoi primele patru diferenţe regresive şi se înlocuiesc în relaţia (9.63) obţinându-se rezultatele din tabelul 9.12.

În figura 9.10 s-au trasat graficele obţinute pentru valorile celor două soluţii: cea numerică obţinută prin metoda Adams si cea exactă obţinută prin integrare directă care au fost date în tabelul 9.13.

Tabelul 9.11

y0	*y1*	*delta f0*	*y1*	*y2*	*delta f0*	*delta2 fo*
2.718282	3.261938	1.739700	3.348923	4.153535	1.931067	0.669785

y1	*y2*	*y3*	*delta f0*	*delta2 f0*	*delta3 f0*
3.352910	4.214134	5.368933	1.939838	0.797682	0.31010

y1	*y2*	*y3*	*y4*	*delta f0*	*delta2 f0*	*delta3 f0*	*delta4 f0*
3.353575	4.220152	5.413285	7.059260	1.941301	0.809198	0.386481	0.163047

y1	*y2*	*y3*	*y4*
3.353440	4.220647	5.418788	7.093548

Pasul 1

Tabelul 9.12

		nabla1	*nabla2*	*nabla3*	*nabla4*		*y5*
f0	5.4365637						
f1	7.377568	1.9410043					
f2	10.129553	2.7519845	0.81098016				
f3	14.088848	3.9592952	1.20731071	0.3963306			
f4	19.5.861933	5.7730857	1.81379054	0.6064798	0.2101493		9.5.4740389

Pasul 2

		nabla1	*nabla2*	*nabla3*	*nabla4*		*y6*
f1	7.377568						
f2	10.129553	2.7519845					
f3	14.088848	3.9592952	1.20731071				
f4	19.5.861933	5.7730857	1.81379054	0.6064798			
f5	28.422117	8.5601833	2.7870976	0.9733071	0.3668272		12.909676

Pasul 3

		nabla1	*nabla2*	*nabla3*	*nabla4*		*y7*
f2	10.129553						
f3	14.088848	3.9592952					
f4	19.5.861933	5.7730857	1.81379054				
f5	28.422117	8.5601833	2.7870976	0.9733071			
f6	41.310963	12.888846	4.32866263	1.541565	0.568258		17.943194

Pasul 4

		nabla1	*Nabla2*	*nabla3*	*nabla4*		*y8*
f3	14.088848						
f4	19.5.861933	5.7730857					
f5	28.422117	8.5601833	2.7870976				
f6	41.310963	12.888846	4.32866263	1.541565			
f7	61.00686	19.5.695897	6.80705146	2.4783888	0.9368238		25.437901

Pasul 5

		nabla1	*nabla2*	*nabla3*	*nabla4*		*y9*
f4	19.5.861933						
f5	28.422117	8.5601833					
f6	41.310963	12.888846	4.32866263				
f7	61.00686	19.5.695897	6.80705146	2.4783888			
f8	91.576442	30.569582	10.8736842	4.0666327	1.5882439		36.784961

Pasul 6

		nabla1	**nabla2**	**nabla3**	**nabla4**		**y10**
f4	28.422117						
f5	41.310963	12.888846					
f6	61.00686	19.5.695897	6.80705146				
f7	91.576442	30.569582	10.8736842	4.0666327			
f8	139.5.78285	48.206409	17.6368269	6.7631427	2.6965099		54.256055

Soluția exactă Tabelul 9.13

i	**xi**	**yi**	i	**xi**	**yi**
0	1	2.718282	5	1,5	9.5.487736
1	1,1	3.353485	6	1,6	12.935817
2	1,2	4.220696	7	1,7	17.993310
3	1,3	5.419481	8	1,8	25.533722
4	1,4	7.099327	9	1,9	36.966053
			10	2,0	54.598150

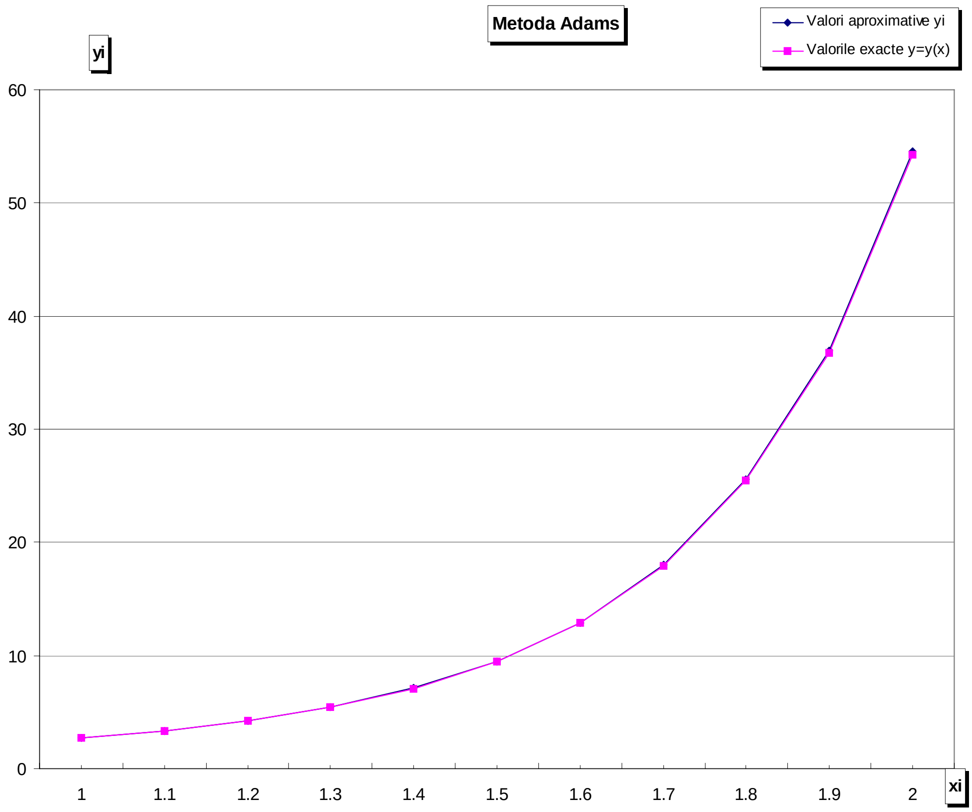


Fig. 9.10. Soluția exactă şi cea aproximativă obținută prin *metoda Adams*

Se observă o foarte bună apropiere a rezultatelor obținute prin această metodă cu cele obținute din integrarea directă a ecuației diferențiale.

9.7. Metoda Adams-Bashforth

Se consideră ecuația diferențială ordinară de ordinul I:

$$y' = f(x,y); \quad y(x_0) = y_0 \tag{9.78}$$

şi o diviziune a intervalului [a, b] de forma:

$$x_0=a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_i,\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n=b. \tag{9.79}$$

Metoda Adams-Bashforth foloseşte pentru determinarea soluției $y(x)$ aceeaşi formulă (9.63) în care se rețin primele cinci diferențe finite, dedusă cu ajutorul polinomului de interpolare Newton cu diferențe finite regresive:

$$y_{i+1} = y_i + h\left(f_i + \frac{1}{2}\nabla f_i + \frac{5}{12}\nabla^2 f_i + \frac{3}{8}\nabla^3 f_i + \frac{251}{720}\nabla^4 f_i + \frac{475}{288}\nabla^5 f_i \right) \tag{9.80}$$

Valorile aproximative ale funcției $y(x)$ se determină în două etape astfel:

Etapa 1: se determină soluțiile aproximative în primele patru punctele prin *metoda Runge-Kutta IV:*

- în punctul x_1

$$\begin{aligned} & y_1 = y_0 + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ & k_1 = f(x_0, y_0) \\ & k_2 = f(x_0 + 0{,}5h; y_0 + 0{,}5hk_1) \\ & k_3 = f(x_0 + 0{,}5h; y_0 + 0{,}5hk_2) \\ & k_4 = f(x_0 + h; y_0 + hk_3) \end{aligned} \tag{9.81}$$

- în punctul x_2

$$\begin{aligned} & y_2 = y_1 + h(k_1' + 2k_2' + 2k_3' + k_4') \\ & k_1' = f(x_1, y_1) \\ & k_2' = f(x_1 + 0{,}5h; y_1 + 0{,}5hk_1') \\ & k_3' = f(x_1 + 0{,}5h; y_1 + 0{,}5hk_2') \\ & k_4' = f(x_1 + h; y_1 + hk_3') \end{aligned} \tag{9.82}$$

- în punctul x_3

$$\begin{aligned} & y_3 = y_2 + h(k_1'' + 2k_2'' + 2k_3'' + k_4'') \\ & k_1'' = f(x_2, y_2) \\ & k_2'' = f(x_2 + 0{,}5h;\ y_2 + 0{,}5hk_1'') \\ & k_3'' = f(x_2 + 0{,}5h;\ y_2 + 0{,}5hk_2'') \\ & k_4'' = f(x_2 + h;\ y_2 + hk_3'') \end{aligned} \tag{9.83}$$

- în punctul x_4

$$\begin{aligned} & y_4 = y_3 + h(k^*{}_1 + 2k^*{}_2 + 2k^*{}_3 + k^*{}_4) \\ & k^*{}_1 = f(x_3; y_3) \\ & k^*{}_2 = f(x_3 + 0{,}5h;\ y_3 + 0{,}5hk^*{}_1) \\ & k^*{}_3 = f(x_3 + 0{,}5h;\ y_3 + 0{,}5hk^*{}_2) \\ & k^*{}_4 = f(x_3 + h;\ y_3 + hk^*{}_3) \end{aligned} \tag{9.84}$$

Etapa 2: se determină valorile soluției în punctele x_5, x_6, ... cu ajutorul *formulei multipas Adams,* în care se rețin diferențele finite de ordinul IV şi V:

- în punctul x_5:

$$\begin{aligned} & y_5 = y_4 + h\left(f_4 + \frac{1}{2}\nabla f_4 + \frac{5}{12}\nabla^2 f_4 + \frac{3}{8}\nabla^3 f_4 + \frac{251}{720}\nabla^4 f_4 \right); \\ & \nabla f_4 = f_4 - f_3; \\ & \nabla^2 f_4 = f_4 - 2f_3 + f_2; \\ & \nabla^3 f_4 = f_4 - 3f_3 + 3f_2 - f_1 \\ & \nabla^4 f_4 = f_4 - 4f_3 + 6f_2 - 4f_1 + f_0 \end{aligned} \tag{9.85}$$

- în punctul x_6:

$$y_6 = y_5 + h\left(f_5 + \frac{1}{2}\nabla f_5 + \frac{5}{12}\nabla^2 f_5 + \frac{3}{8}\nabla^3 f_5 + \frac{251}{720}\nabla^4 f_5 + \frac{475}{288}\nabla^5 f_5 \right)$$

$$\nabla f_5 = f_5 - f_4;$$
$$\nabla^2 f_5 = f_5 - 2f_4 + f_3;$$
$$\nabla^3 f_5 = f_5 - 3f_4 + 3f_3 - f_2; \qquad (9.86)$$
$$\nabla^4 f_5 = f_5 - 4f_4 + 6f_3 - 4f_2 + f_1;$$
$$\nabla^5 f_5 = f_5 - 5f_4 + 10f_3 - 10f_2 + 5f_1 - f_0.$$

În punctele x_7, x_8, ... se procedează în mod analog ca în cazul punctului x_6 .

Aplicația 9.6

Folosind *metoda Adams-Bashforth* să se rezolve ecuația diferențială cu condiții la limită: $y' = 2xy;$ $y(1) = e$ pentru intervalul [*1, 2*] cu un pas al diviziunilor constant *h=0,1.*

Rezolvare

Folosind relațiile (9.81) ... (9.84) se determină valorile aproximative ale soluției prin metoda Runge Kutta de ordinul III în primele patru noduri: y_1, y_2, y_3, y_4. S-au obținut rezultatele din tabelul 9.14.

Se calculează apoi primele patru diferențe regresive şi se înlocuiesc în relațiile (9.85), (9.86) obținându-se: la pasul 1 soluția y_5, la pasul 2 soluția y_6, ..., la pasul 5 soluția y_{10}, rezultatele fiind cele din tabelul 9.15.

În figura 9.11 s-au trasat graficele pentru valorile celor două soluții obținute: soluția numerică prin metoda Adams-Bashforth şi cea exactă obținută prin integrare directă, soluție dată în tabelul 9.16.

Tabelul 9.14

x	*yi*	*fi*	*k1*	*k2*	*k3*	*k4*	*yi+1*
1	2.718282	5.436564	5.436564	6.279231	6.367711	7.381116	3.353475
1.1	3.353475	7.377644	7.377644	8.561421	8.697555	10.135752	4.220664
1.2	4.220664	10.129593	10.129593	11.817858	12.028892	14.101237	5.419403
1.3	5.419403	14.090447	14.090447	16.534597	16.864557	19.6.8964	7.099155

Tabelul 9.15

Pasul 1							
x	*yi*	*fi*	*nabla1*	*nabla2*	*nabla3*	*nabla4*	*y5*
1	2.718282	5.436564					
1.1	3.353475	7.377644	1.941080				
1.2	4.220664	10.129593	2.751949	0.810868			
1.3	5.419403	14.090447	3.960854	1.208905	0.398036		
1.4	7.099155	19.6.877634	5.787188	1.826334	0.617429	0.219393	9.6.483177

Pasul 2							
x	*yi*	*fi*	*nabla1*	*nabla2*	*nabla3*	*nabla4*	*y6*
1.1	3.353475	7.377644					
1.2	4.220664	10.129593	2.7519488				
1.3	5.419403	14.090447	3.9608537	1.208905			
1.4	7.099155	19.6.877634	5.7871879	1.826334	0.6174293		
1.5	9.6.483177	28.449531	8.571897	2.784709	0.9583748	0.3409455	12.92058

Pasul 3							
x	*yi*	*fi*	*nabla1*	*nabla2*	*nabla3*	*nabla4*	*y7*
1.2	4.220664	10.129593					
1.3	5.419403	14.090447	3.9608537				
1.4	7.099155	19.6.877634	5.7871879	1.826334			
1.5	9.6.483177	28.449531	8.571897	2.784709	0.9583748		
1.6	12.920579	41.345854	12.896323	4.324426	1.5397169	0.581342	17.95817

Pasul 4							
x	*yi*	*fi*	*nabla1*	*nabla2*	*nabla3*	*nabla4*	*y8*
1.3	5.419403	14.090447					
1.4	7.099155	19.6.877634	5.7871879				
1.5	9.6.483177	28.449531	8.571897	2.784709			
1.6	12.920579	41.345854	12.896323	4.324426	1.5397169		
1.7	17.958171	61.057782	19.6.711927	6.815604	2.4911785	0.9514616	25.46012

Pasul 5							
x	*yi*	*fi*	*nabla1*	*nabla2*	*nabla3*	*nabla4*	*y9*
1.4	7.099155	19.6.877634					
1.5	9.6.483177	28.449531	8.571897				
1.6	12.920579	41.345854	12.896323	4.324426			
1.7	17.958171	61.057782	19.6.711927	6.815604	2.4911785		
1.8	25.460117	91.656422	30.598641	10.88671	4.0711089	1.5799304	36.81705

Pasul 6							
x	*yi*	*fi*	*nabla1*	*nabla2*	*nabla3*	*nabla4*	*y10*
1.5	9.6.483177	28.449531					
1.6	12.920579	41.345854	12.896323				
1.7	17.958171	61.057782	19.6.711927	6.815604			
1.8	25.460117	91.656422	30.598641	10.88671	4.0711089		
1.9	36.817049	139.6.90479	48.248365	17.64972	6.7630111	2.6919022	54.30281

Tabelul 9.16

i	*xi*	*yi*	*i*	*xi*	*yi*
0	1	2.718282	5	1.5	9.6.487736
1	1.1	3.353485	6	1.6	12.935817
2	1.2	4.220696	7	1.7	17.993310
3	1.3	5.419481	8	1.8	25.533722
4	1.4	7.099327	9	1.9	36.966053

				10	2	54.598150

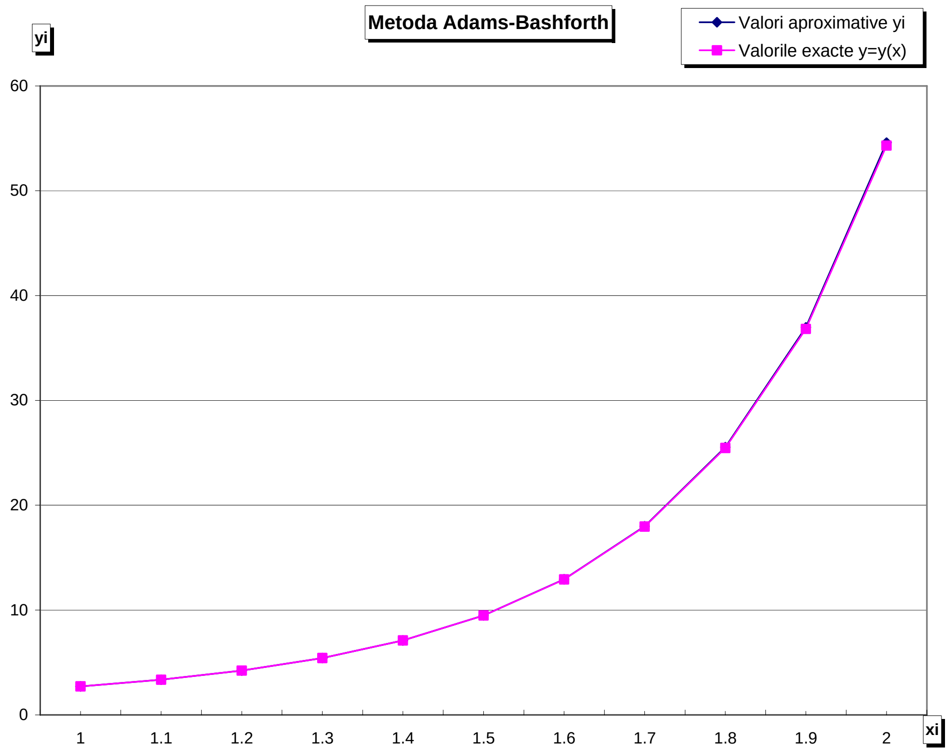


Fig. 9.11. Soluţia exactă şi aproximativă obţinută prin *metoda Adams-Bashforth*

Se observă o foarte bună apropiere a rezultatelor obţinute prin această metodă cu rezultatele obţinute din soluţia exactă a ecuaţiei diferenţiale.

10. METODE NUMERICE PENTRU CALCULUL DEPLASĂRILOR

10.1. Introducere

Una dintre metodele numerice moderne pentru calculul structurilor mecanice static nedeterminate este *metoda deplasărilor*, care a condus ulterior la apariția *metodei elementelor finite*. Metoda deplasărilor este o aplicație a calculului matriceal pentru rezolvarea unui sistem mecanic format din elemente de tip bară, având ca necunoscute deplasările şi rotirile din nodurile elementelor sistemului.

În cadrul acestei metode se exprimă *forțele nodale elementale* corespunzătoare fiecărui element în funcție de *deplasările nodale* corespunzătoare, apoi se scriu *ecuațiile de echilibru ale forțelor nodale* corespunzătoare fiecărui nod. Ecuațiile matriceale forțe–deplasări nodale elementale se scriu în *dimensiunea deplasărilor globale* ale structurii şi se însumează obținându-se *ecuația matriceală globală* forțe exterioare–deplasări nodale. Astfel, pentru aplicarea acestei metode se parcurg următoarele etape:

1. pentru fiecare element al structurii se scrie câte o relație matriceală între forțele şi deplasările nodale corespunzătoare:

$$\lfloor K^e \rfloor \{\delta^e\} = \{F^e\} \tag{10.1}$$

unde: $\lfloor K^e \rfloor$ este matricea de rigiditate a elementului *e*;

$\{\delta^e\}$, matricea coloană a deplasărilor nodale a elementului *e*;

$\{F^e\}$, matricea coloană a forțelor nodale a elementului *e*.

2. se exprimă relațiile matriceale (10.1) în dimensiunea deplasărilor globale:

$$\lfloor K^e \rfloor_G \{\delta^e\}_G = \{F^e\}_G \tag{10.2}$$

3. se însumează relațiile matriceale (10.2) şi se scriu ecuațiile de echilibru ale forțelor corespunzătoare fiecărui nod obținându-se o ecuație matriceală globală de forma:

$$[K]_G \{\delta\}_G = \{P\} \tag{10.3}$$

unde: $[K]_G$ este matricea globală de rigiditate a structurii ;

$\{\delta\}_G$ - matricea coloană globală a deplasărilor nodale a structurii;

$\{P\}$ - matricea coloană a încărcărilor exterioare (forțele direct aplicate şi de legătură)

Matricea globală de rigiditate a structurii $[K]_G$ obținută este o matrice pătratică $n \times n$ singulară (unde n este numărul total al deplasărilor nodurilor structurii). Dacă în matricea globale de rigiditate a structurii $[K]_G$ se elimină liniile corespunzătoare forțelor de legătură necunoscute, respectiv coloanele corespunzătoare blocajelor sau deplasărilor impuse nodurilor, se obține o matrice pătratică nesingulară.

4. se rezolvă ecuația matriceală obținută după operația de ridicare a singularității matricei globale de rigiditate a structurii $[K]_G$
5. postprocesarea rezultatelor obținute constă în determinarea reacțiunilor, eforturilor din bare, tensiunilor, deformatiilor, diagramelor de eforturi, etc.

Algoritmii metodei deplasărilor pentru patru tipuri de structuri mecanice plane formate din bare drepte sunt prezentați în continuare.

10.2. Structură de tip bară dreaptă cu secțiunea în trepte, solicitată la întindere-compresiune

Se consideră o bară dreaptă articulată la capete formată din patru tronsoane având secțiunile: *4A, 3A, 2A, A* și lungimile corespunzătoare: *a; 1,5a ; 2a* respectiv *2,25a* . Bara este solicitată axial de un sistem format din trei forțe: *P, 2P, 3P,* ca în figura 10.1. Să se determine folosind *metoda deplasărilor* reacțiunile din legăturile 0, 4 și deplasările nodurilor 1, 2 și 3.

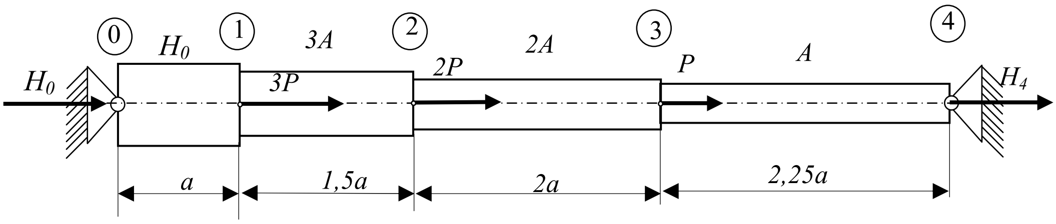


Fig.10.1

Algoritmul metodei deplasărilor

Se consideră un element din bară având secțiunea constantă A^e, lungimea L^e, fiind delimitat de nodurile *i* și *j* (fig. 10.2) pentru care s-a notat:

- u_i și u_j *deplasările nodale* corespunzătoare nodurilor *i* și *j*;
- F^e_{xi} și F^e_{xj} *forțele nodale elementale* corespunzătoare nodurilor *i* și *j*.

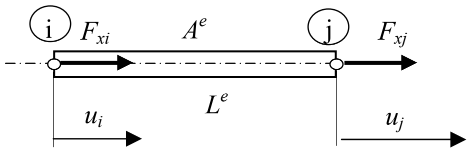


Fig. 10.2

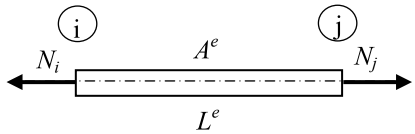


Fig. 10.3

Se observă din figura 10.3 că forța nodală F^e_{xj} corespunzătoare nodului j coincide cu efortul axial N_j , iar forța nodală F^e_{xi} corespunzătoare nodului i este egală dar are sens opus cu efortul secțional axial N_i :

$$F^e_{xj} = N_j ;$$
$$F^e_{xi} = -N_i . \qquad (10.4)$$

Se exprimă deformația elementului de bară ΔL_{ij} şi forțele nodale elementale F^e_{xj} şi F^e_{xi} în funcție de deplasările nodale corespunzătoare u_i şi u_j :

$$\Delta L_{i-j} = u_j - u_i = \frac{N_i L^e}{EA^e} = \frac{N_j L^e}{EA^e} \Rightarrow N_i = N_j = -\frac{EA^e}{L^e}\left(u_i - u_j\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F^e_{xi} = -N_i = \dfrac{EA^e}{L^e}\left(u_i - u_j\right) \\ F^e_{xj} = N_j = -\dfrac{EA^e}{L^e}\left(u_i - u_j\right) \end{cases} \qquad (10.5)$$

Relația (10.5) dintre forțele şi deplasările nodale corespunzătoare se mai scrie sub forma matriceală astfel:

$$\begin{Bmatrix} F^e_{xi} \\ F^e_{xj} \end{Bmatrix} = \frac{EA^e}{L^e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \qquad (10.6)$$

Pentru a exemplifica modul în care se aplică *algoritmul metodei deplasărilor* în acest caz se consideră aplicația din figura 10.1 şi se parcurg etapele prezentate la paragraful 10.1.

Etapele algoritmului de calcul prin metoda deplasărilor sunt:

1. Se scriu relațiile matriceale dintre forțele şi deplasările nodale corespunzătoare, conform relației (10.6), pentru fiecare dintre cele patru tronsoane (elemente) ale barei:

- tronsonul 0 – 1 (elementul *e1*): $\begin{Bmatrix} F^{e1}_{x0} \\ F^{e1}_{x1} \end{Bmatrix} = \dfrac{E \cdot 4A}{a}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{Bmatrix}$
- tronsonul 1 – 2 (elementul *e2*): $\begin{Bmatrix} F^{e2}_{x1} \\ F^{e2}_{x2} \end{Bmatrix} = \dfrac{E \cdot 3A}{1{,}5a}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$ (10.7)
- tronsonul 2 – 3 (elementul *e3*): $\begin{Bmatrix} F^{e3}_{x2} \\ F^{e3}_{x3} \end{Bmatrix} = \dfrac{E \cdot 2A}{2a}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$
- tronsonul 3 – 4 (elementul *e4*): $\begin{Bmatrix} F^{e4}_{x3} \\ F^{e3}_{x4} \end{Bmatrix} = \dfrac{E \cdot A}{2{,}25a}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_3 \\ u4 \end{Bmatrix}$

2. Se exprimă relațiile matriceale dintre forțele și deplasările nodale corespunzătoare pentru cele patru elemente în dimensiunea deplasărilor globale $\{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4\}^t$:

➢ elementul *e1*:

$$\begin{Bmatrix} F_{x0}^{e1} \\ F_{x1}^{e1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{E \cdot 4A}{a} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

➢ elementul *e2*:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ F_{x1}^{e2} \\ F_{x2}^{e2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{E \cdot 3A}{1{,}5a} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

➢ elementul *e3*:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{x2}^{e3} \\ F_{x3}^{e3} \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{E \cdot 2A}{2a} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \qquad (10.8)$$

➢ elementul *e4*:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{x3}^{e4} \\ F_{x4}^{e4} \end{Bmatrix} = \frac{E \cdot A}{2{,}25a} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

3. Se scriu ecuațiile de echilibru dintre forțele nodale elementale şi sarcinile exterioare care acționează în fiecare nod . În figura 10.4 s-au reprezentat forțele care acționează asupra nodurilor ca fiind egale şi opuse cu forțele nodale elementale .

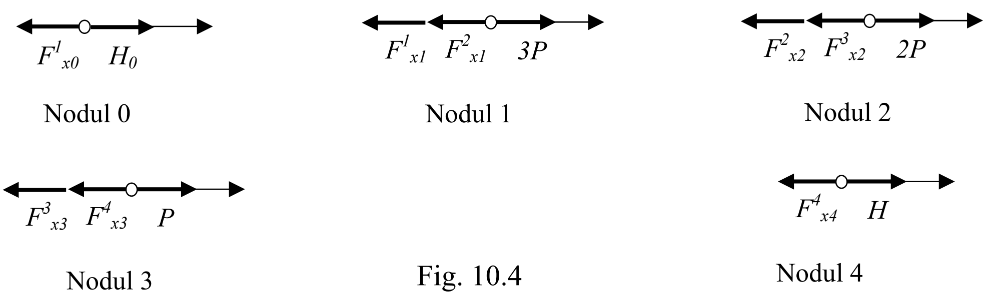


Fig. 10.4

Conform reprezentării din figura (10.4) se pot scrie pentru fiecare nod următoarele ecuații de echilibru al forțelor nodale şi exerioare:

- pentru nodul 0:

$$-F_{x0}^{1}+H_0=0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{4EA}{a}(u_0-u_1)=-H_0 \tag{10.9}$$

- pentru nodul 1:

$$-F_{x1}^{1}-F_{x1}^{2}+3P=0 \Leftrightarrow \frac{4EA}{a}(u_0-u_1)-\frac{2EA}{a}(u_2-u_1)=-3P \tag{10.10}$$

- pentru nodul 2:

$$-F_{x2}^{2}-F_{x2}^{3}+2P=0 \Leftrightarrow \frac{2EA}{a}(u_1-u_2)-\frac{EA}{a}(u_2-u_3)=-2P \tag{10.11}$$

- pentru nodul 3:

$$-F_{x3}^{3}-F_{x3}^{4}+P=0 \Leftrightarrow \frac{EA}{a}(u_2-u_3)-\frac{4EA}{9a}(u_3-u_4)=-P \tag{10.12}$$

- pentru nodul 4:

$$-F_{x4}^{4}+H_4=0 \quad \Leftrightarrow \frac{4EA}{9a}(u_3-u_4)=-H_4 \tag{10.13}$$

Primele expresii ale ecuațiilor (10.9) ... (10.13) se pot scrie sub formă matriceală astfel:

$$\begin{Bmatrix} F_{x0}^{e1} \\ F_{x1}^{e1}+F_{x1}^{e2} \\ F_{x2}^{e2}+F_{x2}^{e3} \\ F_{x3}^{e3}+F_{x3}^{e4} \\ F_{x4}^{e4} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} H_0 \\ 3P \\ 2P \\ P \\ H_4 \end{Bmatrix} \tag{10.14}$$

Relația matriceală obținută (10.14) exprimă echilibrul forțelor interioare (*forțele nodale elementale corespunzătoare fiecărui nod)* şi al celor exterioare (*direct aplicate sau de legătură)* care acționează asupra fiecărui nod.

Ecuațiile (10.9)...(10.13) exprimate în funcție de deplasările nodale (a doua expresie) se poate scrie matriceal astfel:

$$\frac{EA}{a}\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 13/9 & -4/9 \\ 0 & 0 & 0 & -4/9 & 4/9 \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} H_0 \\ 3P \\ 2P \\ P \\ H_4 \end{Bmatrix} \tag{10.15}$$

Ecuația matriceală globală (10.15) se poate obține direct prin însumarea ecuațiilor matriceale (10.8) şi ținând seama şi de relația matriceală (10.14).

4. Introducerea condițiilor la limită și rezolvarea ecuației matriceale globale. În ecuația matriceală (10.15) se introduc condițiile la limită:

$$u_0 = u_4 = 0 \tag{10.16}$$

Eliminând liniile 1 și 5 din ecuația matriceală globală (10.15) corespunzătoare reacțiunilor necunoscute H_0 și H_4 respectiv coloanele 1 și 5 ale matricei de rigiditate globală, corespunzătoare deplasărilor nule (10.16), rezultă ecuația matriceală:

$$\frac{EA}{a}\begin{bmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -13/9 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3P \\ -2P \\ -P \end{Bmatrix} \tag{10.15}$$

Matricea de rigiditate globală este nesingulară și se poate inversa:

$$[K] = \frac{EA}{a}\begin{bmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -13/9 \end{bmatrix} \tag{10.16}$$

$$[K]^{-1} = -\frac{9}{128}\frac{a}{EA}\begin{bmatrix} 10/3 & 26/9 & 2 \\ 26/9 & 26/3 & 6 \\ 2 & 6 & 14 \end{bmatrix} \tag{10.17}$$

Înmulțind ecuația (10.15) cu matricea inversă $[K]^{-1}$ se obțin deplasărilor necunoscute:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = -\frac{9}{128}\frac{a}{EA}\begin{bmatrix} 10/3 & 26/9 & 2 \\ 26/9 & 26/3 & 6 \\ 2 & 6 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -3P \\ -2P \\ -P \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{Pa}{EA}\begin{Bmatrix} 1,25 \\ 2,25 \\ 2,25 \end{Bmatrix} \tag{10.18}$$

5. Postprocesarea rezultatelor

Din ecuațiile ecuației matriceale globale (10.15) corespunzătoare liniilor 1 și 4 se determină reacțiunile necunoscute:

$$H_0 = \frac{EA}{a}(4u_0 - u_1) = -5P;$$

$$H_4 = \frac{EA}{a}\left(-\frac{4}{9}u_3 + \frac{4}{9}u_4\right) = -P \tag{10.19}$$

Se pot calcula eforturile axiale și tensiunile corespunzătoare fiecărui tonson: (10.20)

$N_{0-1} = -H_0 = 5P;$ $N_{1-2} = -H_0 - 3P = 2P;$ $N_{2-3} = -H_0 - 5P = 0;$ $N_{3-4} = -H_0 - 6P = -P;$

$\sigma_{0-1} = 5P/4A;$ $\sigma_{1-2} = 2P/3A;$ $\sigma_{2-3} = 0;$ $\sigma_{3-4} = -P/A.$

10.3. Strtuctură plană formată din bare articulate, solicitată la întindere-compresiune

Se consideră sistemul static nedeterminat exterior, format din şapte bare de secţiune constantă, articulate în noduri, legat de mediul fix în nodurile 1, 2 prin articulaţii şi în nodul 3 printr-un reazem simplu, ca în figura 10.5. Bara este acţionată de două forţe în nodul 5: una orizontală *P* şi una verticală *2P*. Folosind metoda deplasărilor să se determine deplasările nodurilor, eforturile din barele sistemului şi reacţiunile din nodurile 1, 2 şi 3.

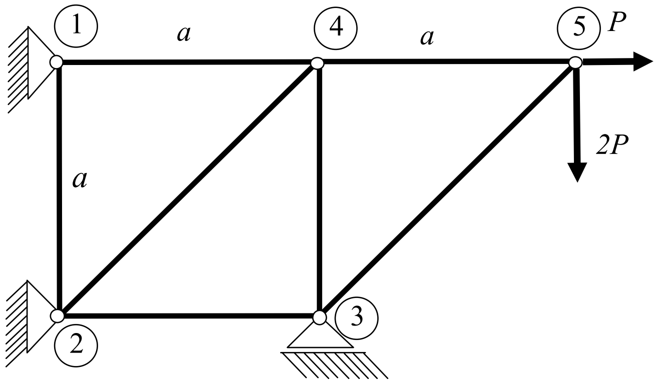


Fig.10.5

Algoritmul metodei

Se consideră elementul de tip bară articulată la capete de secţiune constantă A^e şi lungime L^e delimitat de nodurile *i* şi *j* la capete (fig. 10.6). Acest element preia numai eforturi axiale (de întindere sau compresiune).

Aşa cum s-a arătat la paragraful 10.1, se pot exprima *forţele nodale elementale* în funcţie de *deplasările nodale* pentru acest element. Într-un sistem de axe local legat de element ($\overline{O_1 x}$ coincide cu axa barei) relaţiile (10.6) se scriu:

$$\begin{Bmatrix} \overline{F}^e_{xi} \\ \overline{F}^e_{xj} \end{Bmatrix} = \frac{EA^e}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{u}_j \end{Bmatrix} \tag{10.21}$$

Dacă se introduc deplasările nodurilor *i* şi *j* după două direcţii perpendiculare în sistemul local de axe (după $\overline{O_1 x}$ respectiv $\overline{O_1 y}$, fig. 10.6), notate cu $\overline{u}_i, \overline{v}_i, \overline{u}_j, \overline{v}_j$ şi forţele nodale elementale corespunzătoare $\overline{F}^e_{xi}, \overline{F}^e_{yi}, \overline{F}^e_{xj}, \overline{F}^e_{yj}$ atunci relaţia (10.21) se scrie sub formă matriceală astfel:

$$\begin{Bmatrix} \overline{F}^e_{xi} \\ \overline{F}^e_{yi} \\ \overline{F}^e_{xj} \\ \overline{F}^e_{yj} \end{Bmatrix} = \frac{EA^e}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \\ \overline{u}_j \\ \overline{v}_j \end{Bmatrix} \tag{10.22}$$

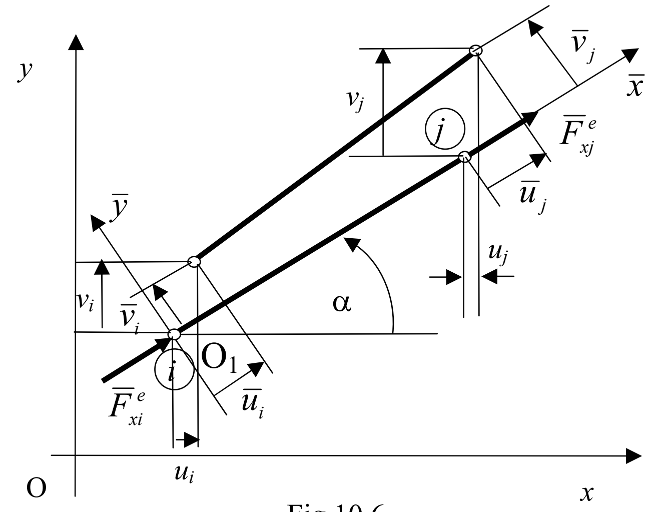


Fig.10.6

Întrucât elementul de bară suportă numai eforturi axiale, forțele elementale perpendiculare pe axa barei $\overline{F}^e_{yi}$, $\overline{F}^e_{yj}$ sunt nule. Relația (10.22) se mai scrie sub forma:

$$\{\overline{F}^e\} = \lfloor \overline{K}^e \rfloor \cdot \{\overline{\delta}^e\} \tag{10.23}$$

unde: $\lfloor \overline{K}^e \rfloor$ este matricea de rigiditate a elementului e în coordonate locale;

$\{\overline{\delta}^e\}$, matricea coloană a deplasărilor nodale în coordonate locale;

$\{\overline{F}^e\}$, matricea coloană a forțelor nodale în coordonate locale.

Deplasările nodale corespunzătoare elementului în coordonate locale $\overline{u}_i, \overline{v}_i, \overline{u}_j, \overline{v}_j$ se pot exprima în funcție de *deplasările nodale în coordonate globale* u_i, v_i, u_j, v_j şi unghiul α dintre axele $O\overline{x}$ şi Ox, astfel:

$$\begin{aligned} \overline{u}_i &= u_i \cos\alpha + v_i \sin\alpha; & \overline{u}_j &= u_j \cos\alpha + v_j \sin\alpha \\ \overline{v}_i &= -u_i \sin\alpha + v_i \cos\alpha; & \overline{v}_j &= -u_j \sin\alpha + v_j \cos\alpha \end{aligned} \tag{10.24}$$

Notând $\cos\alpha = \ell$, $\sin\alpha = m$, relațiile (10.24) se scriu sub formă matriceală astfel:

$$\begin{Bmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \\ \overline{u}_j \\ \overline{v}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell & m & 0 & 0 \\ -m & \ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ell & m \\ 0 & 0 & -m & \ell \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \tag{10.25}$$

sau sub forma:

$$\{\overline{\delta}^e\} = [T] \cdot \{\delta^e\} \tag{10.26}$$

unde $[T]$ este *matricea de transfer* din sistemul local $\overline{O_1xy}$ în sistemul global Oxy.

Forțele nodale elementale din sistemul local $\overline{F}_{xi}^{e}, \overline{F}_{yi}^{e}, \overline{F}_{xj}^{e}, \overline{F}_{yj}^{e}$ se exprimă în funcție de *forțele nodale elementale din sistemul global* $F_{xi}^{e}, F_{yi}^{e}, F_{xj}^{e}, F_{yj}^{e}$ (fig.10.7), obținându-se:

$$\begin{Bmatrix} \overline{F}_{xi}^{e} \\ \overline{F}_{yi}^{e} \\ \overline{F}_{xj}^{e} \\ \overline{F}_{yj}^{e} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell & m & 0 & 0 \\ -m & \ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ell & m \\ 0 & 0 & -m & \ell \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_{xi}^{e} \\ F_{xi}^{e} \\ F_{xi}^{e} \\ F_{xi}^{e} \end{Bmatrix} \qquad (10.27)$$

Relația (10.27) se mai scrie sub forma:

$$\left\{\overline{F}^{e}\right\} = [T] \cdot \left\{F^{e}\right\} \qquad (10.28)$$

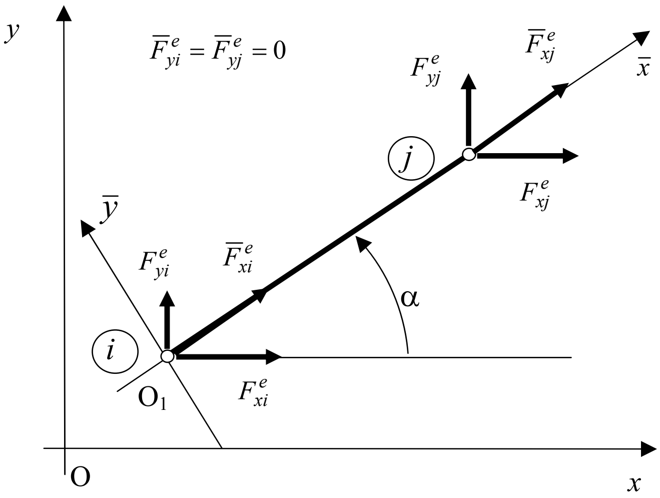


Fig.10.7

Din proprietatea matricei de transfer: $[T] \cdot [T]^{t} = [I]$ rezultă că inversa acestei matrice este transpusa ei. Ținând seama de relațiile (10.26) şi (10.28), relația (10.23) se scrie:

$$[T] \cdot \left\{F^{e}\right\} = \left\lfloor \overline{K}^{e} \right\rfloor \cdot [T] \cdot \left\{\delta^{e}\right\}. \qquad (10.29)$$

Înmulțind relația (10.29) la stânga cu matricea $[T]^{-1} = [T]^{t}$ se obține:

$$[T]^{t} \cdot [T] \cdot \left\{F^{e}\right\} = [T]^{t} \left\lfloor \overline{K}^{e} \right\rfloor \cdot [T] \cdot \left\{\delta^{e}\right\}. \qquad (10.30)$$

S-a obținut aşadar o relație matriceală între *forțele nodale elementale globale* $F_{xi}^{e}, F_{yi}^{e}, F_{xj}^{e}, F_{yj}^{e}$ şi d*deplasările nodale în coordonate globale* u_i, v_i, u_j, v_j:

$$\left\{F^{e}\right\} = \left\lfloor K^{e} \right\rfloor \cdot \left\{\delta^{e}\right\} \qquad (10.31)$$

În relația (10.31) s-a notat cu $\left\lfloor K^{e} \right\rfloor = [T]^{t} \left\lfloor \overline{K}^{e} \right\rfloor \cdot [T]$ *matricea de rigiditate a elementului în coordonate globale :*

$$\left[K^e\right]=\frac{EA^e}{L^e}\begin{bmatrix} \ell & -m & 0 & 0 \\ m & \ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ell & -m \\ 0 & 0 & m & \ell \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \ell & m & 0 & 0 \\ -m & \ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ell & m \\ 0 & 0 & -m & \ell \end{bmatrix} \quad (10.32)$$

Efectuând calculele se obține expresia matricei de rigiditate în coordonate globale:

$$\left[K^e\right]=\frac{EA^e}{L^e}\begin{bmatrix} \ell^2 & \ell m & -\ell^2 & -\ell m \\ \ell m & m^2 & -\ell m & -m^2 \\ -\ell^2 & -\ell m & \ell^2 & \ell m \\ -\ell m & -m^2 & \ell m & m^2 \end{bmatrix} \quad (10.32')$$

Din expresia *matricei de rigiditate a elementului în coordonate globale* (10.32') se observă că toate elementele situate pe diagonala principală sunt pozitive, suma elementelor situate pe linii şi pe coloane este nulă şi matricea este simetrică în raport cu diagonala principală.

Pentru a exemplifica modul în care se aplică algoritmul metodei deplasărilor în cazul sistemelor formate din bare articulate, se consideră grinda cu zăbrele din figura 10.8 formată din şapte bare de secțiune constantă, articulate în noduri, legată de mediul fix în nodurile 1, 2 şi 3 acționată în nodul 5de două forțe: una orizontală *P* şi una verticală *2P*.

1. Se scriu relațiile matriceale dintre forțele nodale şi deplasările corespunzătoare, conform relației (10.2.11), pentru fiecare dintre cele şapte elemente ale grinzii cu zăbrele.

În tabelul 10.2.1 este definit pentru fiecare element al grinzii cu zăbrele din figura 10.2.4: nodul *i* şi *j,* coordonatele nodurilor în sistemul de coordonate global şi cosinusurile directoare ale fiecărui element în raport cu acesta.

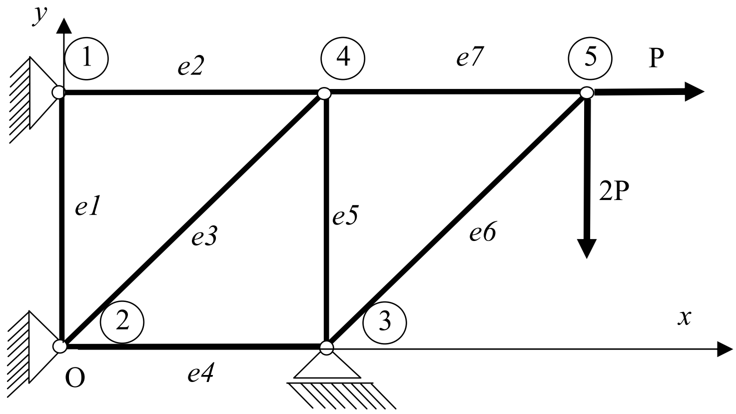


Fig.10.8

Tabelul 10.1

Element	*Nodurile i-j*		*Coordonatele nodurilor în Oxy*				ℓ ($cos\alpha$)	m ($sin\alpha$)	L^e
	i	*j*	x_i	y_i	x_j	y_j			
e1	1	2	0	a	0	0	0	-1	a
e2	1	4	0	a	a	a	1	0	a
e3	2	4	0	0	a	a	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}a$
e4	2	3	0	0	a	0	1	0	a
e5	3	4	a	0	a	a	0	1	a
e6	3	5	a	0	2a	a	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}a$
e7	4	5	a	a	2a	a	1	0	a

Ținând seama de expresia generală a matricei de rigiditate (10.32'), relațiile dintre forțele şi deplasările nodale pentru fiecare element se scriu astfel:

- elementul e1:
$$\begin{Bmatrix} F_{x1}^{e1} \\ F_{y1}^{e1} \\ F_{x2}^{e1} \\ F_{y2}^{e1} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{a}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \tag{10.33}$$

- elementul e2:
$$\begin{Bmatrix} F_{x1}^{e2} \\ F_{y1}^{e2} \\ F_{x4}^{e2} \\ F_{y4}^{e2} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{a}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \tag{10.34}$$

- elementul e3:
$$\begin{Bmatrix} F_{x2}^{e3} \\ F_{y2}^{e3} \\ F_{x4}^{e3} \\ F_{y4}^{e3} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{2\sqrt{2}a}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \tag{10.35}$$

- elementul e4:
$$\begin{Bmatrix} F_{x2}^{e4} \\ F_{y2}^{e4} \\ F_{x3}^{e4} \\ F_{y3}^{e4} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{a}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \tag{10.36}$$

- elementul e5:
$$\begin{Bmatrix} F_{x3}^{e5} \\ F_{y3}^{e5} \\ F_{x4}^{e5} \\ F_{y4}^{e5} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{a}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \tag{10.37}$$

- elementul e6:
$$\begin{Bmatrix} F_{x3}^{e6} \\ F_{y3}^{e6} \\ F_{x5}^{e6} \\ F_{y5}^{e6} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{2\sqrt{2}a}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} \tag{10.38}$$

➢ elementul e7:

$$\begin{Bmatrix} F_{x4}^{e7} \\ F_{y4}^{e7} \\ F_{x5}^{e7} \\ F_{y5}^{e7} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} \qquad (10.39)$$

2. Se scriu ecuațiile matriceale pentru fiecare element (10.34) ... (10.39) *din dimensiunile sistemului local, în dimensiunea sistemul global:*

➢ elementul *e1*:

$$\begin{Bmatrix} F_{x1}^{e1} \\ F_{y1}^{e1} \\ F_{x2}^{e1} \\ F_{y2}^{e1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} \qquad (10.40)$$

➢ elementul *e2*:

$$\begin{Bmatrix} F_{x1}^{e2} \\ F_{y1}^{e2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{x4}^{e2} \\ F_{y4}^{e2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} \qquad (10.41)$$

➢ elementul *e3*:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{x2}^{e3} \\ F_{y2}^{e3} \\ 0 \\ 0 \\ F_{x4}^{e3} \\ F_{y4}^{e3} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{2\sqrt{2}a} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & -1 & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & -1 & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & -1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & -1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} \qquad (10.42)$$

- elementul *e4*:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{x2}^{e4} \\ F_{y2}^{e4} \\ F_{x3}^{e4} \\ F_{y3}^{e4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & 0 & -1 & 0 & . & . & . & . \\ . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . \\ . & . & -1 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . \\ . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} \tag{10.43}$$

- elementul *e5*:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{x3}^{e5} \\ F_{y3}^{e5} \\ F_{x4}^{e5} \\ F_{y4}^{e5} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & 0 & 1 & 0 & -1 & . & . \\ . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & 0 & -1 & 0 & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} \tag{10.44}$$

- elementul *e6*:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{x3}^{e6} \\ F_{y3}^{e6} \\ 0 \\ 0 \\ F_{x5}^{e6} \\ F_{x5}^{e6} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{2\sqrt{2}a} \begin{bmatrix} . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & 1 & . & . & -1 & -1 \\ . & . & . & . & 1 & 1 & . & . & -1 & -1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & -1 & -1 & . & . & 1 & 1 \\ . & . & . & . & -1 & -1 & . & . & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} \tag{10.45}$$

- elementul e7:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{x4}^{e7} \\ F_{y4}^{e7} \\ F_{x5}^{e7} \\ F_{x5}^{e7} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} \qquad (10.46)$$

3. Se scriu ecuațiile de echilibru dintre forțele nodale elementale și sarcinile exterioare care acționează asupra fiecărui nod (fig. 10.9) ținând seama că forțele nodale care acționează asupra nodurilor au sensuri opuse cu forțele elementale care acționează asupra elementelor.

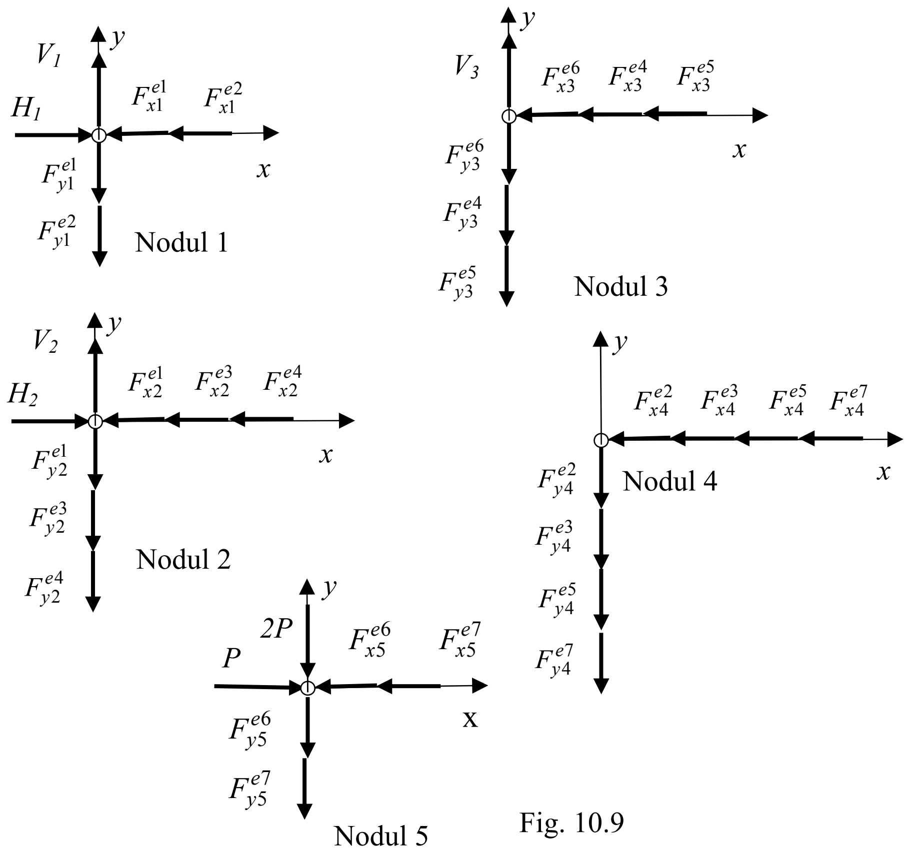


Fig. 10.9

Ecuațiile de echilibru ale forțelor nodale elementale şi a forțelor exterioare pentru fiecare nod se scriu astfel (fig.10.9):

- nodul 1: $$F_{x1}^{e1}+F_{x1}^{e2}=H_1 \qquad F_{y1}^{e1}+F_{y1}^{e2}=V_1 \tag{10.47}$$
- nodul 2: $$F_{x2}^{e1}+F_{x2}^{e3}+F_{x2}^{e4}=H_2 \qquad F_{y2}^{e1}+F_{y2}^{e3}+F_{y2}^{e4}=V_2 \tag{10.48}$$
- nodul 3: $$F_{x3}^{e4}+F_{x3}^{e5}+F_{x3}^{e6}=0 \qquad F_{y3}^{e4}+F_{y3}^{e5}+F_{y3}^{e6}=V_3 \tag{10.49}$$
- nodul 4: $$F_{x4}^{e2}+F_{x4}^{e3}+F_{x4}^{e5}+F_{x4}^{e7}=0 \qquad F_{y4}^{e2}+F_{y4}^{e3}+F_{x4}^{e5}+F_{x4}^{e7}=0 \tag{10.50}$$
- nodul 5: $$F_{x5}^{e6}+F_{x5}^{e7}=P \qquad F_{y5}^{e6}+F_{y5}^{e7}=-2P \tag{10.51}$$

Ecuațiile de echilibru ale forțelor nodale elementale şi a forțelor exterioare date de relațiile (10.47) ... (10.51) se pot exprima sub formă matriceală astfel:

$$\left\{\begin{matrix} F_{x1}^{e1}+F_{x1}^{e2} \\ F_{y1}^{e1}+F_{y1}^{e2} \\ F_{x2}^{e1}+F_{x2}^{e3}+F_{x2}^{e4} \\ F_{y2}^{e1}+F_{y2}^{e3}+F_{y2}^{e4} \\ F_{x3}^{e3}+F_{x3}^{e4}+F_{x3}^{e5} \\ F_{y3}^{e3}+F_{y3}^{e4}+F_{y3}^{e5} \\ F_{x4}^{e2}+F_{x4}^{e3}+F_{x4}^{e5}+F_{x4}^{e7} \\ F_{y4}^{e2}+F_{y4}^{e3}+F_{y4}^{e5}+F_{y4}^{e7} \\ F_{x5}^{e6}+F_{x5}^{e7} \\ F_{y5}^{e6}+F_{y5}^{e7} \end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix} H_1 \\ V_1 \\ H_2 \\ V_2 \\ 0 \\ V_3 \\ 0 \\ 0 \\ P \\ -2P \end{matrix}\right\} \tag{10.52}$$

Prin însumarea membru cu membru a relațiilor matriceale (10.40) … (10.46) se obține în stânga matricea coloană din relația (10.52) iar în dreapta matricea de rigiditate globală a structurii înmulțită cu matricea deplasărilor globale.

Ținând seama de relația (10.52) se obține:

$$\begin{Bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ H_2 \\ V_2 \\ 0 \\ V_3 \\ 0 \\ 0 \\ P \\ -2P \end{Bmatrix} = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & -1 & 0 & . & . \\ 0 & 1 & 0 & -1 & . & . & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & . & . \\ 0 & -1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & . & . \\ . & . & -1 & 0 & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ . & . & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -1 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 2+\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & . & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ . & . & . & . & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & . & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} \quad (10.53)$$

Se observă din expresia matricei globale de rigiditate a structurii că termenii de pe diagonala principală sunt pozitivi, suma termenilor de pe linii sau coloane este zero (matricea este singulară) şi matricea este simetrică în raport cu prima diagonală.

4. Se introduc condiţiile la limită şi se rezolvă ecuaţia matriceale globală obţinută.

Dacă în ecuaţia matriceală (10.53) se introduc condiţiile la limită ale problemei:

$$u_1 = v_1 = u_2 = v_2 = v_3 = 0 \quad (10.54)$$

şi se elimină liniile 1, 2, 3, 4 şi 6 corespunzătoare reacţiunilor H_1, V_1, H_2, V_2, V_3 precum şi coloanele 1, 2, 3, 4 şi 6 corespunzătoare deplasărilor nule (10.54), se obţine următoarea ecuaţie matriceală a deplasărilor:

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 2+\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & 0 & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} = \frac{Pa}{EA} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{Bmatrix} \quad (10.55)$$

Rezolvând acest sistem rezultă valorile deplasărilor necunoscute:

$$u_3 = -2\frac{Pa}{EA};$$
$$u_4 = 2{,}37868\frac{Pa}{EA};\quad v_4 = -0{,}62132\frac{Pa}{EA}; \qquad (10.56)$$
$$u_5 = -5{,}37868\frac{Pa}{EA};\quad v_5 = -13{,}03554\frac{Pa}{EA};$$

5. Postprocesarea rezultatelor

Din ecuațiile corespunzătoare liniilor 1, 2, 3, 4 şi 6 ale ecuației matriceale globale (10.55) se determină reacțiunile necunoscute:

$$H_1 = -u_4\frac{EA}{a} = -2{,}37868P;\qquad V_1 = 0;$$
$$H_2 = \left(-u_3 - \frac{u_4+v_4}{2\sqrt{2}}\right)\frac{EA}{a} = 1{,}37868P;\ V_2 = \left(-\frac{u_4+v_4}{2\sqrt{2}}\right)\frac{EA}{a} = 1{,}37868P; \qquad (10.57)$$
$$V_3 = \left(\frac{u_3}{2\sqrt{2}} - v_4 - \frac{u_5+v_5}{2\sqrt{2}}\right)\frac{EA}{a} = 2{,}62132P;$$

10.4. Structură plană formată din bare drepte cu noduri rigide, solicitată de sarcini în planul ei

Se consideră un cadru plan format din bare drepte de secțiune constantă, solicitat de un sistem plan de forțe şi cupluri concentrate cuprinse în planul lor.

Fără a particulariza problema, se consideră exemplul din figura 10.10 care constă dintr-o grindă de secțiune constantă de lungime *3L*, încastrată la un capăt şi rezemată pe două reazeme punctuale rigide, încărcată la capăt şi încărcată cu o forță concentrată *2P* şi trei cupluri concentrate *2PL, PL* şi respectiv *3PL* Folosind metoda deplasărilor, să se determine reacțiunile din încastrare şi reazeme, deplasarea liniară a nodului 4 şi rotirile secțiunilor din nodurile 2, 3 şi 4.

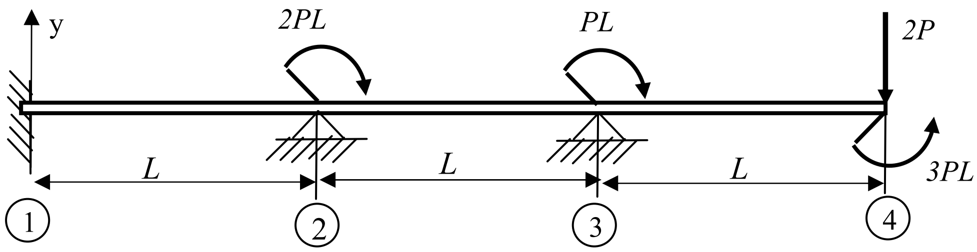


Fig.10.10

Algoritmul metodei

Se consideră un element de bară din acest cadru delimitat de nodurile *i* şi *j*, de lungime L^e, rigiditate la întindere EA^e, rigiditate la încovoiere EI^e şi un sistem local de axe de coordonate $O_1\overline{x}\overline{y}$ legat de element astfel încât $O_1\overline{x}$ să coincidă cu axa barei, ca în figura 10.11.

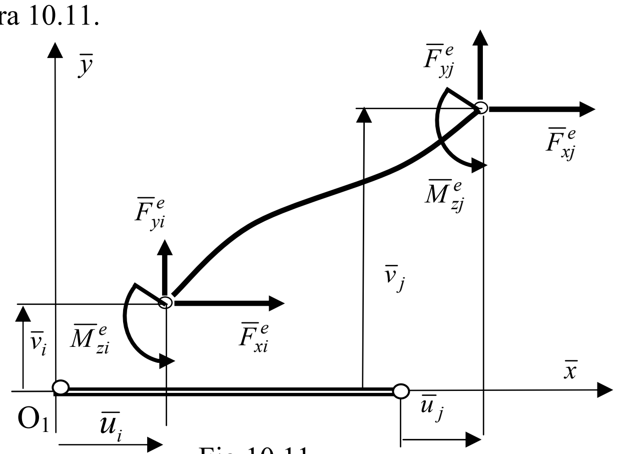


Fig.10.11

Se notează cu $\overline{u}_i, \overline{v}_i, \overline{\varphi}_{zi}, \overline{u}_j, \overline{v}_j, \overline{\varphi}_{zj}$ deplasările liniare şi unghiulare ale nodurilor *i* şi *j* după cele trei direcţii ale sistemului local de axe $O_1\overline{x}\overline{y}$.

Se exprimă deplasările nodale din sistemul local $\overline{u}_i, \overline{v}_i, \overline{\varphi}_{zi}, \overline{u}_j, \overline{v}_j, \overline{\varphi}_{zj}$ în funcţie de deplasările nodale din sistemul global $u_i, v_i, \varphi_{zi}, u_j, v_j, \varphi_{zj}$ şi de unghiul α dintre axa sistemului local $O_1\overline{x}$ şi axa sistemului global *Ox* (fig.10.12):

$$\begin{aligned} &\overline{u}_i = u_i \cos\alpha + v_i \sin\alpha; && \overline{u}_j = u_j \cos\alpha + v_j \sin\alpha \\ &\overline{v}_i = -u_i \sin\alpha + v_i \cos\alpha; && \overline{v}_j = -u_j \sin\alpha + v_j \cos\alpha \\ &\overline{\varphi}_{zi} = \varphi_{zi}; && \overline{\varphi}_{zj} = \varphi_{zj} \end{aligned} \qquad (10.58)$$

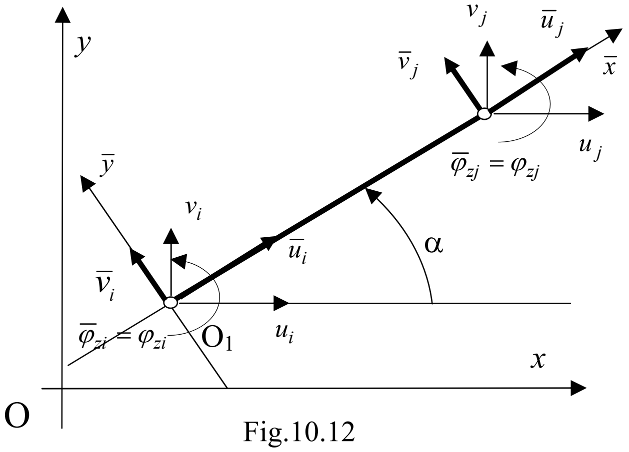


Fig.10.12

Dacă se notează $cos\alpha = \ell \quad si \quad sin\alpha = m$, relațiile (10.58) se scriu:

$$\begin{Bmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \\ \overline{\varphi}_{zi} \\ \overline{u}_j \\ \overline{v}_j \\ \overline{\varphi}_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m & \ell & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ell & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & \ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_{zi} \\ u_j \\ v_j \\ \varphi_{zj} \end{Bmatrix} \tag{10.59}$$

sau: $\{\overline{\delta}^e\} = [T] \cdot \{\delta^e\}$ (10.60)

unde s-a notat cu [*T*] matricea de transfer din sistemul global Oxy în sistemul local de axe $O_1\overline{xy}$.

Din proprietatea matricei de transfer: $[T]\cdot[T]^t = [I]$ rezultă că inversa acestei matrice este transpusa ei.

Sarcinile nodale ale elementelor din sistemul local $O_1\overline{xy}$ se exprimă în același mod în funcție de sarcinile nodale ale elementelor din sistemul global *Oxy* astfel:

$$\begin{Bmatrix} \overline{F}^e_{xi} \\ \overline{F}^e_{yi} \\ \overline{M}^e_{zi} \\ \overline{F}^e_{xj} \\ \overline{F}^e_{yj} \\ \overline{M}^e_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m & \ell & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ell & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & \ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F^e_{xi} \\ F^e_{yi} \\ M^e_{zi} \\ F^e_{xj} \\ F^e_{yj} \\ M^e_{zj} \end{Bmatrix} \tag{10.61}$$

sau: $\{\overline{F}^e\} = [T] \cdot \{F^e\}$ (10.62)

Sarcinile nodale elementale locale $\overline{F}^e_{xi}, \overline{F}^e_{yi}, \overline{M}^e_{zi}, \overline{F}^e_{xj}, \overline{F}^e_{yj}, \overline{M}^e_{zj}$ se pot exprima în funcție de *deplasările nodale* corespunzătoare $\overline{u}_i, \overline{v}_i, \overline{\varphi}_{zi}, \overline{u}_j, \overline{v}_j, \overline{\varphi}_{zj}$, sub următoarea formă matriceală:

$$\begin{Bmatrix} \overline{F}^e_{xi} \\ \overline{F}^e_{yi} \\ \overline{M}^e_{zi} \\ \overline{F}^e_{xj} \\ \overline{F}^e_{yj} \\ \overline{M}^e_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{K}_{11} & \overline{K}_{12} & \overline{K}_{13} & \overline{K}_{14} & \overline{K}_{15} & \overline{K}_{16} \\ \overline{K}_{21} & \overline{K}_{22} & \overline{K}_{23} & \overline{K}_{24} & \overline{K}_{25} & \overline{K}_{26} \\ \overline{K}_{31} & \overline{K}_{32} & \overline{K}_{33} & \overline{K}_{34} & \overline{K}_{35} & \overline{K}_{36} \\ \overline{K}_{41} & \overline{K}_{42} & \overline{K}_{43} & \overline{K}_{44} & \overline{K}_{45} & \overline{K}_{46} \\ \overline{K}_{51} & \overline{K}_{52} & \overline{K}_{53} & \overline{K}_{54} & \overline{K}_{55} & \overline{K}_{56} \\ \overline{K}_{61} & \overline{K}_{62} & \overline{K}_{63} & \overline{K}_{64} & \overline{K}_{65} & \overline{K}_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \\ \overline{\varphi}_{zi} \\ \overline{u}_j \\ \overline{v}_j \\ \overline{\varphi}_{zj} \end{Bmatrix} \tag{10.63}$$

sau: $\{\overline{F}^e\} = \lfloor\overline{K}^e\rfloor \cdot \{\overline{\delta}^e\}$ (10.64)

unde: $\lfloor \overline{K}^e \rfloor$ este matricea de rigiditate a elementului *e* în coordonate locale;

$\{\overline{\delta}^e\}$ - matricea coloană a deplasărilor nodale în coordonate locale;

$\{\overline{F}^e\}$ - matricea coloană a forțelor nodale în coordonate locale.

Elementele matricei de rigiditate a elementului *e* în coordonate locale $\overline{K}_{ij}$ sunt egale cu sarcinile nodale elementale corespunzătoare unor deplasări nodale unitare. Pentru determinarea elementelor matricei de rigiditate situate pe o coloană se consideră pe rând câte una dintre deplasări egală cu unitatea şi toate celelalte deplasări nule.

1. Deplasarea liniară $\overline{u}_i = 1$ (fig. 10.13)

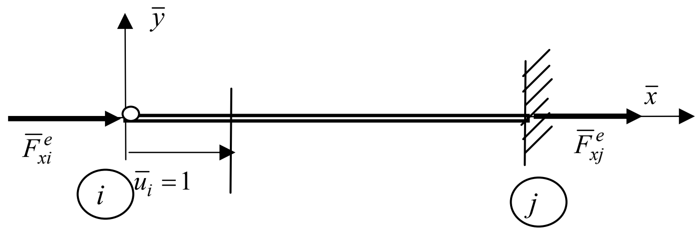


Fig.10.13

Se scriu următoarele ecuații de ehilibru şi deformații:

- ecuații de echilibru: $\overline{F}^e_{xi} + \overline{F}^e_{xj} = 0$ (10.65)
- ecuații de deformații: $\overline{u}_i = 1;\ \overline{u}_j = 0$ (10.66)

$$\Rightarrow \overline{K}_{11} = \overline{F}^e_{xi} = \frac{EA^e}{L^e}\left(\overline{u}_i - \overline{u}_j\right) = \frac{EA^e}{L^e}$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{41} = \overline{F}^e_{xj} = -\frac{EA^e}{L^e}\left(\overline{u}_i - \overline{u}_j\right) = -\frac{EA^e}{L^e} \qquad (10.67)$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{21} = \overline{K}_{31} = \overline{K}_{51} = \overline{K}_{61} = 0$$

2. Deplasarea liniară $\overline{v}_i = 1$ (fig. 10.14)

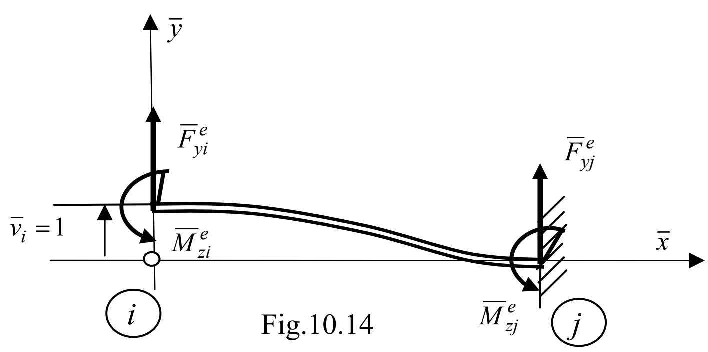


Fig.10.14

Se scriu următoarele ecuații de ehilibru şi deformații:

- ecuații de echilibru: $\begin{cases} \overline{F}_{yi}^{e} + \overline{F}_{yj}^{e} = 0 \\ \overline{M}_{zi}^{e} + \overline{M}_{zj}^{e} - \overline{F}_{yi}^{e} \cdot L = 0 \end{cases}$ (10.68)
- ecuații de deformații: $\overline{v}_i = 1;\ \overline{v}_j = 0;\ \varphi_{zi} = \varphi_{zj} = 0$ (10.69)

$$\begin{cases} EI\overline{v}_j = EI\overline{v}_i + EI\varphi_{zi}L - \overline{M}_{zi}^{e}L^2/2 + \overline{F}_{yi}^{e}L^3/6 = 0 \\ EI\varphi_{zj} = EI\varphi_{zi} - \overline{M}_{zi}^{e}L + \overline{F}_{yi}^{e}L^2/2 = 0 \end{cases} \quad (10.70)$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{32} = \overline{M}_{zi}^{e} = 6EI/L^2;\ \Rightarrow \overline{K}_{22} = \overline{F}_{yi}^{e} = 12EI/L^3$$
$$\Rightarrow \overline{K}_{62} = \overline{M}_{zj}^{e} = 6EI/L^2;\ \Rightarrow \overline{K}_{52} = \overline{F}_{yj}^{e} = -12EI/L^3 \quad (10.71)$$
$$\Rightarrow \overline{K}_{12} = \overline{K}_{42} = 0$$

3. Deplasarea unghiulară $\varphi_{zi} = 1$ (fig. 10.15)

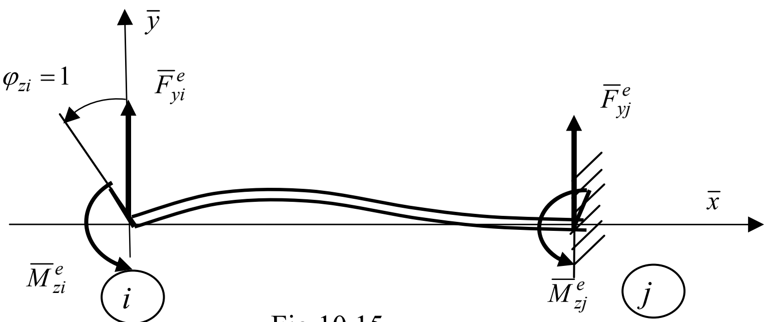


Fig.10.15

Se scriu următoarele ecuații de ehilibru şi deformații:

- ecuații de echilibru: $\begin{cases} \overline{F}_{yi}^{e} + \overline{F}_{yj}^{e} = 0 \\ \overline{M}_{zi}^{e} + \overline{M}_{zj}^{e} - \overline{F}_{yi}^{e}L = 0 \end{cases}$ (10.72)
- ecuații de deformații: $\varphi_{zi} = 1;\ \overline{v}_i = \overline{v}_j = 0;\ \varphi_{zj} = 0$ (10.73)

$$\begin{cases} EI\overline{v}_j = EI\overline{v}_i + EI\varphi_{zi}L - \overline{M}_{zi}^{e}L^2/2 + \overline{F}_{yi}^{e}L^3/6 = 0 \\ EI\varphi_{zj} = EI\varphi_{zi} - \overline{M}_{zi}^{e}L + \overline{F}_{yi}^{e}L^2/2 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \overline{K}_{33} = \overline{M}_{zi}^{e} = 4EI/L;\ \Rightarrow \overline{K}_{23} = \overline{F}_{yi}^{e} = 6EI/L^2 \quad (10.74)$$
$$\Rightarrow \overline{K}_{63} = \overline{M}_{zj}^{e} = 2EI/L;\ \Rightarrow \overline{K}_{52} = \overline{F}_{yj}^{e} = -6EI/L^2$$
$$\Rightarrow \overline{K}_{13} = \overline{K}_{43} = 0$$

4. Deplasarea liniară $\overline{u}_j = 1$ (fig. 10.16)

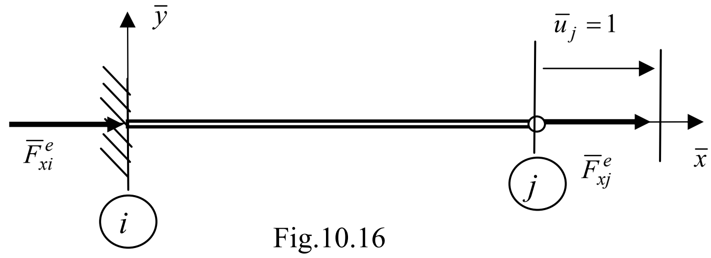


Fig.10.16

Se scriu următoarele ecuații de ehilibru și deformații:

- ecuații de echilibru: $\overline{F}^e_{xi} + \overline{F}^e_{xj} = 0$ (10.75)
- ecuații de deformații: $\overline{u}_i = 0;\ \overline{u}_j = 1$ (10.76)

$$\Rightarrow \overline{K}_{14} = \overline{F}^e_{xi} = \frac{EA^e}{L^e}\left(\overline{u}_i - \overline{u}_j\right) = -\frac{EA}{L}$$
$$\Rightarrow \overline{K}_{44} = \overline{F}^e_{xj} = -\frac{EA^e}{L^e}\left(\overline{u}_i - \overline{u}_j\right) = \frac{EA}{L} \qquad (10.77)$$
$$\Rightarrow \overline{K}_{24} = \overline{K}_{34} = \overline{K}_{54} = \overline{K}_{64} = 0$$

5.Deplasarea liniară $\overline{v}_j = 1$ (fig. 10.17)

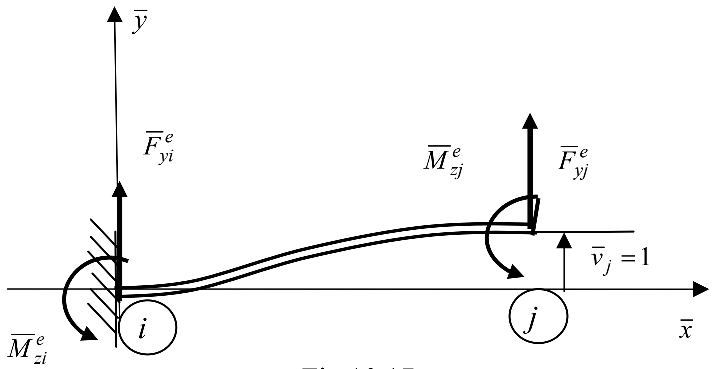


Fig.10.17

Se scriu următoarele ecuații de ehilibru și deformații:

- ecuații de echilibru: $\begin{cases} \overline{F}^e_{yi} + \overline{F}^e_{yj} = 0 \\ \overline{M}^e_{zi} + \overline{M}^e_{zj} - \overline{F}^e_{yi} L = 0 \end{cases}$ (10.78)
- ecuații de deformații: $\overline{v}_i = 0;\ \overline{v}_j = 1;\ \varphi_{zi} = \varphi_{zj} = 0$ (10.79)

$$\begin{cases} EI\overline{v}_j = EI\overline{v}_i + EI\varphi_{zi}L - \overline{M}^e_{zi}L^2/2 + \overline{F}^e_{yi}L^3/6 = EI \\ EI\varphi_{zj} = EI\varphi_{zi} - \overline{M}^e_{zi}L + \overline{F}^e_{yi}L^2/2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{35} = \overline{M}^e_{zi} = -6EI/L^2;\ \Rightarrow \overline{K}_{25} = \overline{F}^e_{yi} = -12EI/L^3 \qquad (10.80)$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{65} = \overline{M}^e_{zj} = -6EI/L^2;\ \Rightarrow \overline{K}_{55} = \overline{F}^e_{yj} = 12EI/L^3$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{15} = \overline{K}_{45} = 0$$

6.Deplasarea unghiulară $\varphi_{zj} = 1$ (fig. 10.18)

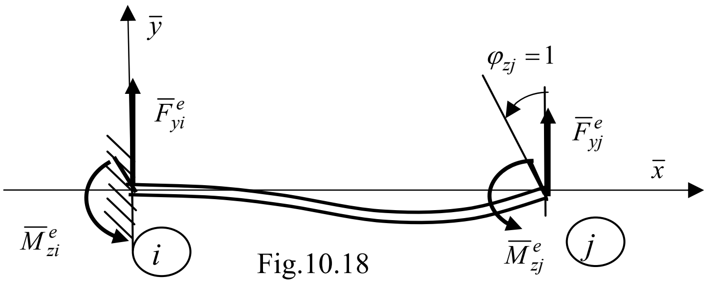


Fig.10.18

Se scriu următoarele ecuații de ehilibru şi deformații:

- ecuații de echilibru: $\begin{cases} \overline{F}^e_{yi} + \overline{F}^e_{yj} = 0 \\ \overline{M}^e_{zi} + \overline{M}^e_{zj} - \overline{F}^e_{yi}L = 0 \end{cases}$ (10.81)

- ecuații de deformații: $\varphi_{zj} = 1;\ \overline{v}_i = \overline{v}_j = 0;\ \varphi_{zi} = 0$ (10.82)

$$\begin{cases} EI\overline{v}_j = EI\overline{v}_i + EI\varphi_{zi}L - \overline{M}^e_{zi}L^2/2 + \overline{F}^e_{yi}L^3/6 = 0 \\ EI\varphi_{zj} = EI\varphi_{zi} - \overline{M}^e_{zi}L + \overline{F}^e_{yi}L^2/2 = EI \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{36} = \overline{M}^e_{zi} = 2EI/L^2;\ \Rightarrow \overline{K}_{26} = \overline{F}^e_{yi} = 6EI/L^3 \qquad (10.83)$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{66} = \overline{M}^e_{zj} = 4EI/L^2;\ \Rightarrow \overline{K}_{56} = \overline{F}^e_{yj} = -6EI/L^3;$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{16} = \overline{K}_{46} = 0$$

Matricea de rigiditate a elementului e este de forma:

$$\left[\overline{K}^e\right] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} & 0 & -12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{L^2} & 4\frac{EI}{L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} & 0 & 12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 4\frac{EI}{L} \end{bmatrix} \qquad (10.84)$$

Dacă se notează $EAL^2/EI = \alpha$ atunci relația matriceală (10.63) se scrie sub forma omogenă:

$$\begin{Bmatrix} \overline{F}_{xi}^{e} \\ \overline{F}_{yi}^{e} \\ \overline{M}_{zi}^{e}/L \\ \overline{F}_{xj}^{e} \\ \overline{F}_{yj}^{e} \\ \overline{M}_{zj}^{e}/L \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^2}\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 0 & -12 & 6 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & -6 & 2 \\ \alpha & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & -6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \overline{u}_i/L \\ \overline{v}_i/L \\ \overline{\varphi}_{zi} \\ \overline{u}_j/L \\ \overline{v}_j/L \\ \overline{\varphi}_{zj} \end{Bmatrix} \qquad (10.85)$$

În cazul grinzii continue din figura 10.10, bara fiind supusă numai la forfecare şi încovoiere, relația matriceală (10.85) a elementului se scrie:

$$\begin{Bmatrix} \overline{F}_{xi}^{e} \\ \overline{M}_{zi}^{e}/L \\ \overline{F}_{xj}^{e} \\ \overline{M}_{zj}^{e}/L \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^2}\begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \overline{v}_i/L \\ \overline{\varphi}_{zi} \\ \overline{v}_j/L \\ \overline{\varphi}_{zj} \end{Bmatrix} \qquad (10.86)$$

Din expresia *matricei de rigiditate a elementului în coordonate locale* din relația (10.85) se observă că toate elementele situate pe diagonala principală sunt pozitive, suma elementelor situate pe linii şi pe coloane este nulă şi matricea este simetrică în raport cu diagonala principală.

Pentru a exemplifica modul în care se aplică algoritmul metodei deplasărilor în acest caz pentru aplicația din figura 10.10 şi se parcurg etapele prezentate mai sus.

1. Se scriu relațiile matriceale dintre forțele nodale şi deplasările corespunzătoare, conform relației (10.86), pentru fiecare dintre element al grinzii.

Se descompune bara în trei elemente având aceeaşi lungime (L) şi rigiditate la încovoiere (EI) ca în figura 10.19 şi se scriu ecuațiile matriceale corespunzătoare fiecărui element, folosind relația (10.86) acestea fiind supuse numai la forfecare şi încovoiere:

- elementul *e1*:

$$\begin{Bmatrix} F_{y1}^{e1} \\ M_{z1}^{e1}/L \\ F_{y2}^{e1} \\ M_{z2}^{e1}/L \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^2}\begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1/L \\ \varphi_{z1} \\ v_2/L \\ \varphi_{z2} \end{Bmatrix} \qquad (10.87)$$

- elementul *e2*:

$$\begin{Bmatrix} F_{y2}^{e2} \\ M_{z2}^{e2}/L \\ F_{y3}^{e2} \\ M_{z3}^{e2}/L \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^2}\begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_2/L \\ \varphi_{z2} \\ v_3/L \\ \varphi_{z3} \end{Bmatrix} \qquad (10.88)$$

- elementul *e3*:

$$\begin{Bmatrix} F_{y3}^{e3} \\ M_{31}^{e3}/L \\ F_{y4}^{e3} \\ M_{z4}^{e3}/L \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^2}\begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_3/L \\ \varphi_{z3} \\ v_4/L \\ \varphi_{z4} \end{Bmatrix} \qquad (10.89)$$

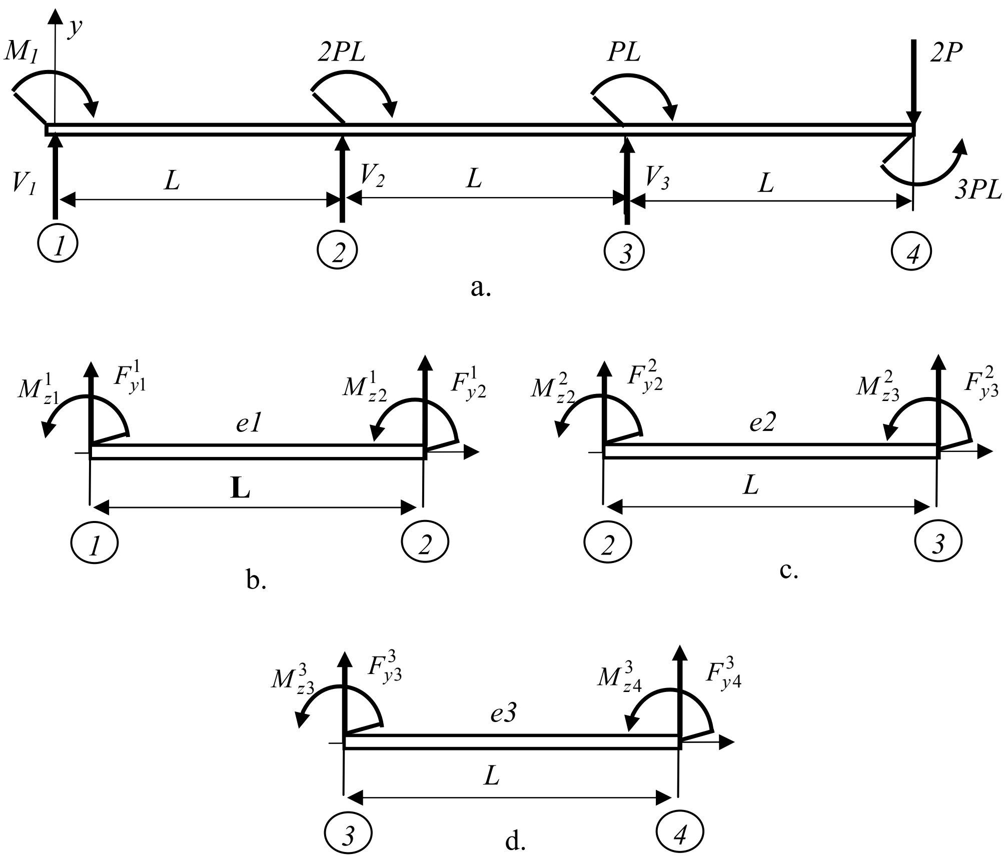


Fig.10.19

2. Se scriu ecuațiile matriceale pentru fiecare element (10.2.14) ... (10.2.19) în dimensiunea deplasărilor din sistemul global:

$$\{v_1/L,\ \varphi_1,\ v_2/L,\ \varphi_2,\ v_3/L,\ \varphi_3\ v_4/L,\ \varphi_4\}^t \tag{10.90}$$

Ecuațiile matriceale (10.87) ... (10.89) se scriu astfel:

- elementul *e1*:

$$\begin{Bmatrix} F_{y1}^{e1} \\ M_{z1}^{e1}/L \\ F_{y2}^{e1} \\ M_{z2}^{e1}/L \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 & . & . & . & . \\ -6 & 4 & -6 & 2 & . & . & . & . \\ -12 & -6 & 12 & -6 & . & . & . & . \\ 6 & 2 & -6 & 4 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1/L \\ \varphi_1 \\ v_2/L \\ \varphi_2 \\ v_3/L \\ \varphi_3 \\ v_4/L \\ \varphi_4 \end{Bmatrix} \tag{10.91}$$

- elementul *e2*:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{y2}^{e2} \\ M_{z2}^{e1}/L \\ F_{y3}^{e2} \\ M_{z3}^{e2}/L \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 12 & -6 & -12 & 6 & . & . \\ . & . & -6 & 4 & -6 & 2 & . & . \\ . & . & -12 & -6 & 12 & -6 & . & . \\ . & . & 6 & 2 & -6 & 4 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1/L \\ \varphi_1 \\ v_2/L \\ \varphi_2 \\ v_3/L \\ \varphi_3 \\ v_4/L \\ \varphi_4 \end{Bmatrix} \tag{10.92}$$

- elementul *e3*:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{y3}^{e3} \\ M_{z3}^{e3}/L \\ F_{y4}^{e3} \\ M_{z4}^{e3}/L \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 12 & -6 & -12 & 6 \\ . & . & . & . & -6 & 4 & -6 & 2 \\ . & . & . & . & -12 & -6 & 12 & -6 \\ . & . & . & . & 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1/L \\ \varphi_1 \\ v_2/L \\ \varphi_2 \\ v_3/L \\ \varphi_3 \\ v_4/L \\ \varphi_4 \end{Bmatrix} \tag{10.93}$$

3. Se scriu ecuațiile de echilibru dintre forțele nodale elementale și sarcinile exterioare care acționează asupra fiecărui nod . Se ține seama că forțele/cuplurile nodale elementale care acționează asupra elementelor și forțele/cuplurile care acționează asupra nodurilor au sensuri opuse. Rezultă următoarele ecuații de echilibru pentru fiecare din cele patru noduri (fig.10.20):

- nodul 1: $\begin{cases} -F_{y1}^{1} + V_1 = 0 \\ -M_{z1}^{1} - M_1 = 0 \end{cases}$ (10.94)

- nodul 2: $\begin{cases} -F_{y2}^{1} - F_{y2}^{2} + V_2 = 0 \\ -M_{z2}^{1} - M_{z2}^{2} - 2PL = 0 \end{cases}$ (10.95)

- nodul 3: $\begin{cases} -F_{y3}^{2} - F_{y3}^{3} + V_3 = 0 \\ -M_{z3}^{2} - M_{z3}^{3} - PL = 0 \end{cases}$ (10.96)

- nodul 4: $\begin{cases} -F_{y4}^{3} - 2P = 0 \\ -M_{z4}^{3} + 3PL = 0 \end{cases}$ (10.97)

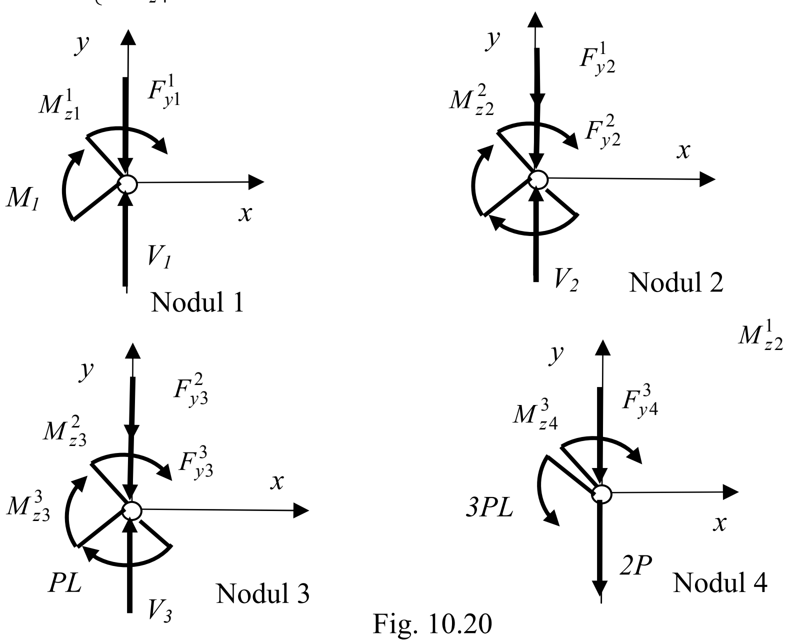


Fig. 10.20

Ecuațiile de echilibru ale forțelor nodale elementale şi a forțelor exterioare date de relațiile (10.94) ... (10.97) se pot exprima sub formă matriceală astfel:

$$\begin{Bmatrix} F_{y1}^{e1} \\ M_{z1}^{e1}/L \\ F_{y2}^{e1} + F_{y2}^{e2} \\ M_{z2}^{e1}/L + M_{z2}^{e2}/L \\ F_{y3}^{e2} + F_{y3}^{e3} \\ M_{z3}^{e2}/L + M_{z3}^{e3}/L \\ F_{y4}^{e4} \\ M_{z4}^{e4}/L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ -M_1/L \\ V_2 \\ -2P \\ V_3 \\ -P \\ -2P \\ 3P \end{Bmatrix} \tag{10.98}$$

Prin însumarea membru cu membru a relațiilor matriceale (10.91)…(10.93) se obține în stânga matricea coloană dată de relația (10.98) iar în dreapta matricea de rigiditate globală a structurii :

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ -M_1/L \\ V_2 \\ -2P \\ V_3 \\ -P \\ -2P \\ 3P \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^2}\begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 & . & . & . & . \\ -6 & 4 & -6 & 2 & . & . & . & . \\ -12 & -6 & 24 & 0 & -12 & 6 & . & . \\ 6 & 2 & 0 & 8 & -6 & 2 & . & . \\ . & . & -12 & -6 & 24 & 0 & -12 & 6 \\ . & . & 6 & 2 & 0 & 8 & -6 & 2 \\ . & . & . & . & -12 & -6 & 12 & -6 \\ . & . & . & . & 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1/L \\ \varphi_1 \\ v_2/L \\ \varphi_2 \\ v_3/L \\ \varphi_3 \\ v_4/L \\ \varphi_4 \end{Bmatrix} \qquad (10.99)$$

Se observă din relația (10.99) că matricea globală de rigiditate a structurii este simetrică în raport cu diagonala principală, are termenii de pe diagonala principală pozitivi şi suma termenilor de pe linii sau coloane este zero (matricea este singulară) .

4. Se introduc condițiile la limită şi se rezolvă ecuației matriceale obținută a cărei matrice este nesingulară. Condițiile la limită sunt:

$$v_1/L = 0;\ \varphi_1 = 0;\ v_2/L = 0;\ v_3/L = 0 \qquad (10.100)$$

şi se elimină din ecuația matriceală (10.99) liniile 1, 2, 3 şi 5 corespunzătoare reacțiunilor V_1, M_1, V_2, V_3 precum şi coloanele 1, 2, 3 şi 5 corespunzătoare deplasărilor nule (10.100), se obține următoarea ecuație matriceală:

$$\frac{EI}{L^2}\begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & -6 & 2 \\ 0 & -6 & 12 & -6 \\ 0 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ v_4/L \\ \varphi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2P \\ -P \\ -2P \\ 3P \end{Bmatrix} \qquad (10.101)$$

Se calculează inversa matricei pătratice din relația matriceală (10.101):

$$[A]^{-1} = \frac{L^2}{EI}\begin{bmatrix} 1/7 & -1/14 & -1/14 & -1/14 \\ -1/14 & 2/7 & 2/7 & 2/7 \\ -1/14 & 2/7 & 13/21 & 11/14 \\ -1/14 & 2/7 & 11/14 & 9/7 \end{bmatrix} \qquad (10.102)$$

Înmulțind relația matriceală (10.101) cu $[A]^{-1}$, se obține:

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ v_4/L \\ 4 \end{Bmatrix} = \frac{PL^2}{EI}\begin{bmatrix} 1/7 & -1/14 & -1/14 & -1/14 \\ -1/14 & 2/7 & 2/7 & 2/7 \\ -1/14 & 2/7 & 13/21 & 11/14 \\ -1/14 & 2/7 & 11/14 & 9/7 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{Bmatrix} \qquad (10.103)$$

Se obțin expresiile deplasărilor liniare şi unghiulare necunoscute:

$$\varphi_2 = -\frac{2PL^2}{7EI};\quad \varphi_3 = \frac{PL^2}{7EI};\quad v_4 = \frac{41PL^3}{42EI};\quad \varphi_4 = \frac{15PL^2}{7EI}; \qquad (10.104)$$

5. Postprocesarea rezultatelor

Ecuațiile corespunzătoare liniilor 1, 2, 3 şi 5 ale ecuației matriceale globale (10.99) se scriu astfel:

$$\frac{EI}{L^2}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -12 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ v_4/L \\ \varphi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ -M_1/L \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} \qquad (10.105)$$

Introducând valorile deplasărilor calculate (10.104) în ecuația matriceală (10.99) se obțin expresiile reacțiunilor:

$$V_1 = -\frac{12}{7}P = -1{,}714P;\quad M_1 = \frac{4}{7}PL = 0{,}571PL;$$
$$V_2 = \frac{6}{7}P = 0{,}857P; \qquad (10.106)$$
$$V_3 = \frac{20}{7}P = 2{,}857P;$$

10.5. Structură plană formată din bare cu noduri rigide, solicitată de sarcini perpendiculare pe planul ei

Se consideră un cadru plan static nedeterminat format din bare drepte de secțiune circulară, solicitat de un sistem de forțe şi cupluri perpendiculare pe planul său. Cadrul este format dintr-o bară dreaptă încastrată la capete, având la mijloc un reazem punctual rigid şi este încărcat cu o forță şi trei cupluri ca în figura 10.21. Se cunosc *L, P, E, G=E/2, d*. Folosind metoda deplasărilor să se determine deplasările liniare şi unghiulare în punctele de aplicație ale forței şi cuplurilor precum şi reacțiunile din încastrare şi reazem.

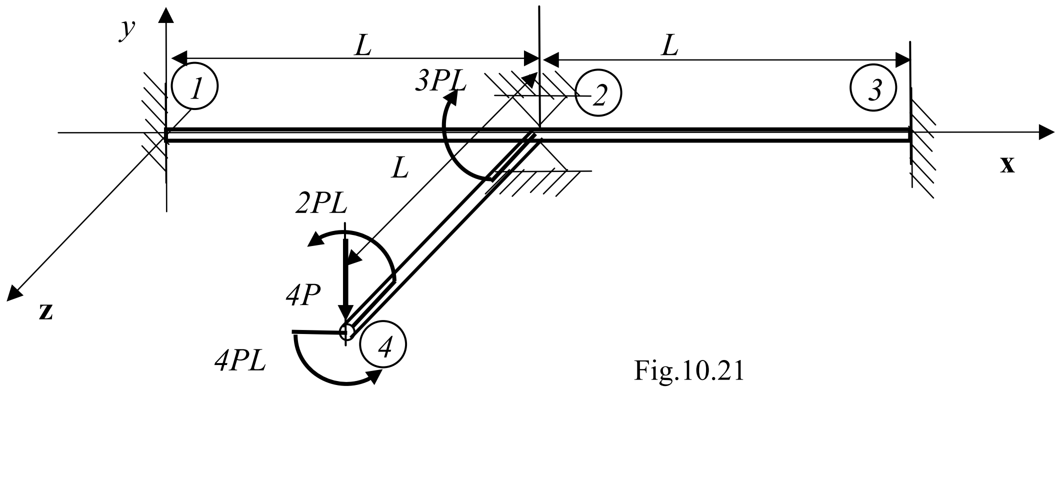


Fig.10.21

Algoritmul metodei

Se consideră un element de bară al acestui cadru, delimitat de nodurile i şi j, având lungimea L^e, rigidităţile la răsucire GI_p şi la încovoiere EI constante (fig. 10.22). Se exprimă sub formă matriceală relaţia dintre sarcinile nodale elementale $\overline{M}^e_{xi}, \overline{M}^e_{zi}, \overline{F}^e_{yi}, \overline{M}^e_{xj}, \overline{M}^e_{zj}, \overline{F}^e_{yj}$ şi deplasările corespunzătoare nodurilor i şi j (liniare şi unghiulare) $\overline{\varphi}_{xi}, \overline{\varphi}_{zi}, \overline{v}_i, \overline{\varphi}_{xj}, \overline{\varphi}_{zj}, \overline{v}_j$, din sistemului local de axe $O_1\overline{xyz}$ astfel:

$$\begin{Bmatrix} \overline{M}^e_{xi} \\ \overline{M}^e_{zi} \\ \overline{F}^e_{yi} \\ \overline{M}^e_{xj} \\ \overline{M}^e_{zj} \\ \overline{F}^e_{yj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{K}_{11} & \overline{K}_{12} & \overline{K}_{13} & \overline{K}_{14} & \overline{K}_{15} & \overline{K}_{16} \\ \overline{K}_{21} & \overline{K}_{22} & \overline{K}_{23} & \overline{K}_{24} & \overline{K}_{25} & \overline{K}_{26} \\ \overline{K}_{31} & \overline{K}_{32} & \overline{K}_{33} & \overline{K}_{34} & \overline{K}_{35} & \overline{K}_{36} \\ \overline{K}_{41} & \overline{K}_{42} & \overline{K}_{43} & \overline{K}_{44} & \overline{K}_{45} & \overline{K}_{46} \\ \overline{K}_{51} & \overline{K}_{52} & \overline{K}_{53} & \overline{K}_{54} & \overline{K}_{55} & \overline{K}_{56} \\ \overline{K}_{61} & \overline{K}_{62} & \overline{K}_{63} & \overline{K}_{64} & \overline{K}_{65} & \overline{K}_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \overline{\varphi}_{xi} \\ \overline{\varphi}_{zi} \\ \overline{v}_{yi} \\ \overline{\varphi}_{xj} \\ \overline{\varphi}_{zj} \\ \overline{v}_{yj} \end{Bmatrix} \qquad (10.107)$$

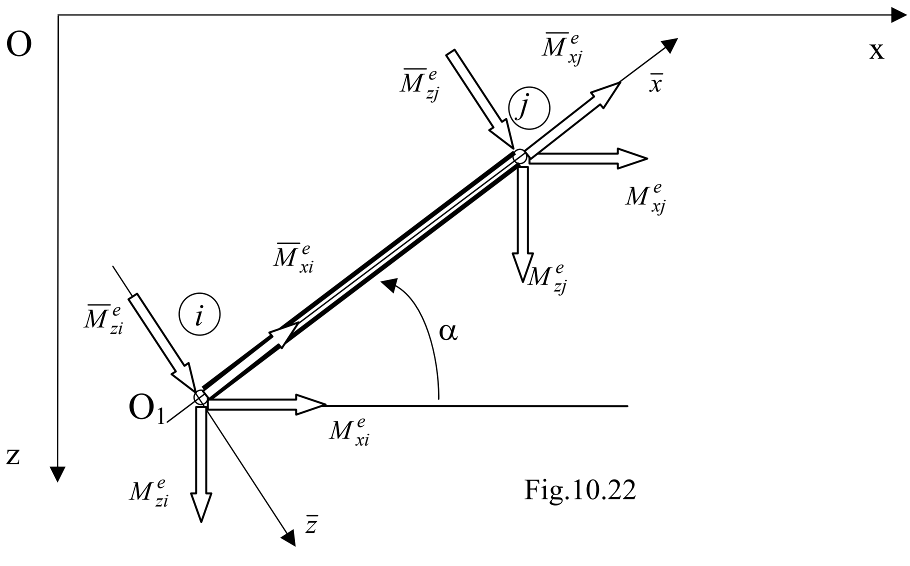


Fig.10.22

Relaţia (10.107) se mai scrie: $\{\overline{F}^e\} = \lfloor \overline{K}^e \rfloor \cdot \{\overline{\delta}^e\}$ (10.108)

Sarcinile nodale din sistemul local $\overline{M}^e_{xi}, \overline{M}^e_{zi}, \overline{F}^e_{yi}, \overline{M}^e_{xj}, \overline{M}^e_{zj}, \overline{F}^e_{yj}$ se scriu în funcţie de sarcinile nodale din sistemul global şi de unghiul α dintre axele celor două axe $O_1\overline{x}$ şi Ox, cu ajutorul relaţiilor:

$$\begin{aligned} &\overline{M}_{xi} = M_{xi}\cos\alpha - M_{zi}\sin\alpha; && \overline{M}_{xj} = M_{xj}\cos\alpha - M_{zj}\sin\alpha \\ &\overline{M}_{zi} = M_{xi}\sin\alpha + M_{zi}\cos\alpha; && \overline{M}_{zj} = M_{xj}\sin\alpha + M_{zj}\cos\alpha \\ &\overline{F}_{yi} = F_{yi}; && \overline{F}_{yj} = F_{yj} \end{aligned} \qquad (10.109)$$

Se notează $\cos\alpha = \ell;\ \sin\alpha = m$ şi relaţiile (10.109) se scriu matriceal astfel:

$$\begin{Bmatrix} \overline{M}_{xi} \\ \overline{M}_{zi} \\ F_{yi} \\ \overline{M}_{xj} \\ \overline{M}_{zj} \\ F_{yj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell & -m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m & \ell & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ell & -m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & \ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} M_{xi} \\ M_{zi} \\ F_{yi} \\ M_{xj} \\ M_{zj} \\ F_{yj} \end{Bmatrix} \qquad (10.110)$$

sau: $\{\overline{F}^e\} = [T] \cdot \{F^e\}$. (10.111)

Deplasările nodale din sistemul local $O\overline{xyz}$ se exprimă sub formă în funcție de deplasările nodale ale elementului din sistemul global Oxy astfel:

$$\begin{Bmatrix} \overline{\varphi}_{xi} \\ \overline{\varphi}_{zi} \\ \overline{v}_i \\ \overline{\varphi}_{xj} \\ \overline{\varphi}_{zj} \\ \overline{v}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell & -m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m & \ell & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ell & -m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & \ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varphi_{xi} \\ \varphi_{zi} \\ v_i \\ \varphi_{xj} \\ \varphi_{zj} \\ v_j \end{Bmatrix} \qquad (10.112)$$

sau: $\{\overline{\delta}^e\} = [T] \cdot \{\delta^e\}$. (10.113)

Înlocuind relațiile (10.111) şi (10.113) în expresia (10.108) se obține:

$$[T] \cdot \{F^e\} = [\overline{K}^e] \cdot [T] \cdot \{\delta^e\} \qquad (10.114)$$

Înmulțind la stânga relația (10.114) cu matricea $[T]^{-1} = [T]^t$ se obține:

$$[T]^t \cdot [T] \cdot \{F^e\} = [T]^t [\overline{K}^e] \cdot [T] \cdot \{\delta^e\}$$

unde: $[K^e] = [T]^{-1} [\overline{K}^e] \cdot [T]$ (10.115)

este matricea de rigiditate a elementului în coordonate globale.

Elementele $\overline{K}_{ij}$ ale matricei de rigiditate a elementului în coordonate locale reprezintă sarcinile nodale corespunzătoare unor deplasări unitare. Pentru determinarea lor se consideră pe rând câte una dintre cele şase deplasări nodale egală cu unitatea (celelalte fiind considerate nule) şi se calculează sarcinile nodale corespunzătoare.

***1**. Deplasarea unghiulară* $\overline{\varphi}_{xi} = 1$ (fig. 10.23)

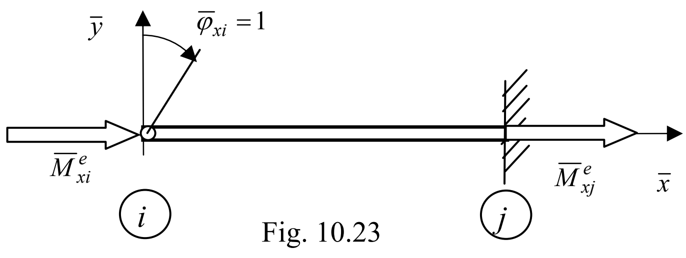


Fig. 10.23

- ecuațiile de echilibru: $\overline{M}_{xi}^{e} + \overline{M}_{xj}^{e} = 0$ (10.116)
- ecuațiile de deformații: $\overline{\varphi}_{xi} = 1;\ \overline{\varphi}_{xj} = 0$ (10.117)

$$\Rightarrow \overline{K}_{11} = \overline{M}_{xi}^{e} = \frac{GI_p^{\ e}}{L^e}\left(\overline{\varphi}_{xi} - \overline{\varphi}_{xj}\right) = \frac{GI_p^{\ e}}{L^e};$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{41} = \overline{M}_{xj}^{e} = -\frac{GI_p^{\ e}}{L^e}\left(\overline{\varphi}_{xi} - \overline{\varphi}_{xj}\right) = -\frac{GI_p^{\ e}}{L^e} \qquad (10.118)$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{21} = \overline{K}_{31} = \overline{K}_{51} = \overline{K}_{61} = 0$$

***2.** Deplasarea unghiulară* $\overline{\varphi}_{zi} = 1$ (fig. 10.24)

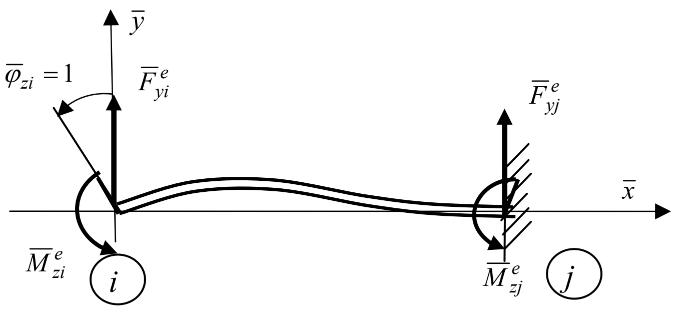


Fig. 10.24

- ecuațiile de echilibru: $\begin{cases} \overline{F}_{yi}^{e} + \overline{F}_{yj}^{e} = 0 \\ \overline{M}_{zi}^{e} + \overline{M}_{zj}^{e} - \overline{F}_{yi}^{e} L = 0 \end{cases}$ (10.119)
- ecuațiile de deformații: $\overline{\varphi}_{zi} = 1;\ \overline{v}_i = \overline{v}_j = 0;\ \overline{\varphi}_{zj} = 0$ (10.120)

$$\begin{cases} EI\overline{v}_j = EI\overline{v}_i + EI\overline{\varphi}_{zi}L - \overline{M}_{zi}^{e}L^2/2 + \overline{F}_{yi}^{e}L^3/6 = 0 \\ EI\overline{\varphi}_{zj} = EI\overline{\varphi}_{zi} - \overline{M}_{zi}^{e}L + \overline{F}_{yi}^{e}L^2/2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{22} = \overline{M}_{zi}^{e} = 4EI/L\ ;\ \Rightarrow \overline{K}_{32} = \overline{F}_{yi}^{e} = 6EI/L^2 \qquad (10.121)$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{52} = \overline{M}_{zj}^{e} = 2EI/L\ ;\ \Rightarrow \overline{K}_{62} = \overline{F}_{yj}^{e} = -6EI/L^2;$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{12} = \overline{K}_{42} = 0$$

4. Deplasarea liniară $\overline{v}_i = 1$ (fig. 10.25)

- ecuațiile de echilibru: $\begin{cases} \overline{F}_{yi}^{e} + \overline{F}_{yj}^{e} = 0 \\ \overline{M}_{zi}^{e} + \overline{M}_{zj}^{e} - \overline{F}_{yi}^{e} \cdot L = 0 \end{cases}$ (10.122)
- ecuațiile de deformații: $\overline{v}_i = 1;\ \overline{v}_j = 0;\ \overline{\varphi}_{zi} = \overline{\varphi}_{zj} = 0$ (10.123)

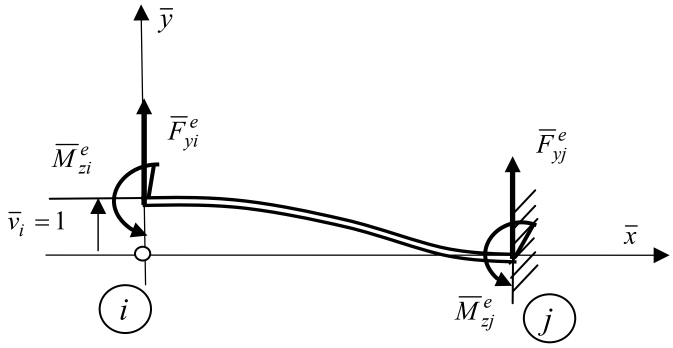


Fig.10.25

$$\begin{cases} EI\overline{v}_j = EI\overline{v}_i + EI\overline{\varphi}_{zi}L - \overline{M}^e_{zi}L^2/2 + \overline{F}^e_{yi}L^3/6 = 0 \\ EI\overline{\varphi}_{zj} = EI\overline{\varphi}_{zi} - \overline{M}^e_{zi}L + \overline{F}^e_{yi}L^2/2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{23} = \overline{M}^e_{zi} = 6EI/L^2; \;\Rightarrow \overline{K}_{33} = \overline{F}^e_{yi} = 12EI/L^3 \tag{10.124}$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{53} = \overline{M}^e_{zj} = 6EI/L^2; \;\Rightarrow \overline{K}_{63} = \overline{F}^e_{yj} = -12EI/L^3;$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{13} = \overline{K}_{43} = 0$$

4. *Deplasarea unghiulară* $\overline{\varphi}_{xj} = 1$ (fig. 10.26)

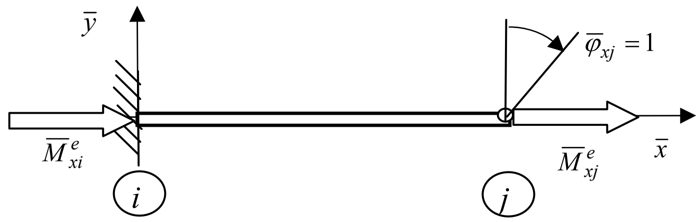


Fig. 10.26

- ecuațiile de echilibru: $\overline{M}^e_{xi} + \overline{M}^e_{xj} = 0$ (10.126)
- ecuațiile de deformații: $\overline{\varphi}_{xi} = 0, \; \overline{\varphi}_{xj} = 1$ (10.127)

$$\Rightarrow \overline{K}_{14} = \overline{M}^e_{xi} = \frac{GI_p^{\,e}}{L^e}\left(\overline{\varphi}_{xi} - \overline{\varphi}_{xj}\right) = -\frac{GI_p^{\,e}}{L^e};$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{44} = \overline{M}^e_{xj} = -\frac{GI_p^{\,e}}{L^e}\left(\overline{\varphi}_{xi} - \overline{\varphi}_{xj}\right) = \frac{GI_p^{\,e}}{L^e} \tag{10.128}$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{24} = \overline{K}_{34} = \overline{K}_{54} = \overline{K}_{64} = 0$$

***5.** Deplasarea unghiulară* $\overline{\varphi}_{zj} = 1$ (fig. 10.27)

- ecuațiile de echilibru: $\begin{cases} \overline{F}^e_{yi} + \overline{F}^e_{yj} = 0 \\ \overline{M}^e_{zi} + \overline{M}^e_{zj} - \overline{F}^e_{yi} L = 0 \end{cases}$ (10.129)
- ecuațiile de deformații: $\overline{\varphi}_{zj} = 1;\ \overline{v}_i = \overline{v}_j = 0;\ \overline{\varphi}_{zi} = 0$ (10.130)

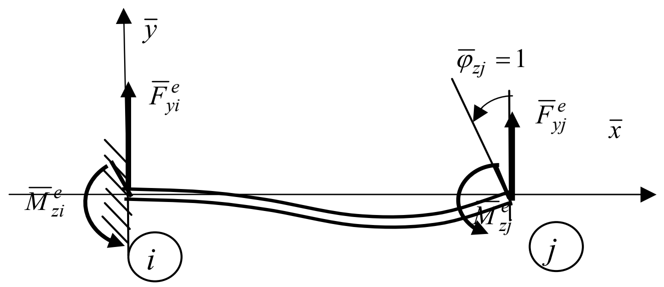


Fig. 10.27

$$\begin{cases} EI\overline{v}_j = EI\overline{v}_i + EI\varphi_{zi}L - \overline{M}^e_{zi}L^2/2 + \overline{F}^e_{yi}L^3/6 = 0 \\ EI\overline{\varphi}_{zj} = EI\overline{\varphi}_{zi} - \overline{M}^e_{zi}L + \overline{F}^e_{yi}L^2/2 = EI \end{cases} \quad (10.131)$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{25} = \overline{M}^e_{zi} = 2EI/L\ ;\ \overline{K}_{35} = \overline{F}^e_{yi} = 6EI/L^2$$
$$\overline{K}_{55} = \overline{M}^e_{zj} = 4EI/L\ ;\ \overline{K}_{65} = \overline{F}^e_{yj} = -6EI/L^2; \quad (10.132)$$
$$\overline{K}_{15} = \overline{K}_{45} = 0$$

***6.** Deplasarea liniară* $\overline{v}_j = 1$ (fig. 10.28)

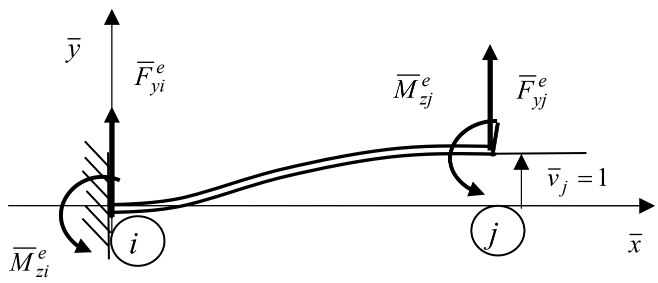


Fig.10.28

- ecuațiile de echilibru: $\begin{cases} \overline{F}^e_{yi} + \overline{F}^e_{yj} = 0 \\ \overline{M}^e_{zi} + \overline{M}^e_{zj} - \overline{F}^e_{yi} L = 0 \end{cases}$ (10.133)
- ecuațiile de deformații: $\overline{v}_i = 0;\ \overline{v}_j = 1;\ \overline{\varphi}_{zi} = \overline{\varphi}_{zj} = 0$ (10.134)

$$\begin{cases} EI\overline{v}_j = EI\overline{v}_i + EI\overline{\varphi}_{zi}L - \overline{M}^e_{zi}L^2/2 + \overline{F}^e_{yi}L^3/6 = EI \\ EI\overline{\varphi}_{zj} = EI\overline{\varphi}_{zi} - \overline{M}^e_{zi}L + \overline{F}^e_{yi}L^2/2 = 0 \end{cases} \tag{10.135}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \overline{K}_{26} = \overline{M}^e_{zi} = -6EI/L^2; \ \Rightarrow \overline{K}_{36} = \overline{F}^e_{yi} = -12EI/L^3 \\ &\Rightarrow \overline{K}_{56} = \overline{M}^e_{zj} = -6EI/L^2; \ \Rightarrow \overline{K}_{66} = \overline{F}^e_{yj} = 12EI/L^3; \\ &\Rightarrow \overline{K}_{16} = \overline{K}_{46} = 0 \end{aligned} \tag{10.136}$$

Matricea de rigiditate a elementului în coordonate locale se scrie:

$$\left[\overline{K}^e\right] = \begin{bmatrix} \frac{GI_p}{L} & 0 & 0 & -\frac{GI_p}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 4\frac{EI}{L} & 6\frac{EI}{L^2} & 0 & 2\frac{EI}{L} & -6\frac{EI}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{L^2} & 12\frac{EI}{L^3} & 0 & 6\frac{EI}{L^2} & -12\frac{EI}{L^3} \\ -\frac{GI_p}{L} & 0 & 0 & \frac{GI_p}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 2\frac{EI}{L}^{3} & 6\frac{EI}{L^2} & 0 & 12\frac{EI}{L} & -6\frac{EI}{L^2} \\ 0 & -6\frac{EI}{L^2} & -12\frac{EI}{L^3} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 12\frac{EI}{L^3} \end{bmatrix} \tag{10.137}$$

Din expresia *matricei de rigiditate a elementului în coordonate globale* (10.137) se observă că toate elementele situate pe diagonala principală sunt pozitive şi matricea este simetrică în raport cu diagonala principală.

Pentru a obţine o formă omogenă a relaţiei matriceale (10.137) se notează $GI_p\ /EI=\alpha$, obţinându-se următoarea relaţie matriceală între forţele/cuplurile şi deplasările/ rotirile corespunzătoare:

$$\begin{Bmatrix} \overline{M}_{xi}/L \\ \overline{M}_{zi}/L \\ \overline{F}_{yi} \\ \overline{M}_{xi}/L \\ \overline{M}_{zi}/L \\ \overline{F}_{yi} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 6 & 12 & 0 & 6 & -12 \\ -\alpha & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & -6 & -12 & 0 & -6 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \overline{\varphi}_{xi} \\ \overline{\varphi}_{zi} \\ \overline{v}_{yi}/L \\ \overline{\varphi}_{xj} \\ \overline{\varphi}_{zj} \\ \overline{v}_{yj}/L \end{Bmatrix} \tag{10.138}$$

Pentru a exemplifica modul în care se aplică algoritmul metodei deplasărilor în acest caz pentru aplicaţia din figura 10.21 şi se parcurg etapele prezentate la începutul capitolului.

1. Se scriu relațiile matriceale dintre forțele nodale și deplasările corespunzătoare, conform relației (10.138), *pentru fiecare dintre element al grinzii.* Se descompune bara în trei elemente de aceeași lungime (L) și rigiditate la încovoiere (EI) și răsucire (GI_p) ca în figura 10.29 și se scriu ecuațiile matriceale corespunzătoare pentru fiecare element.

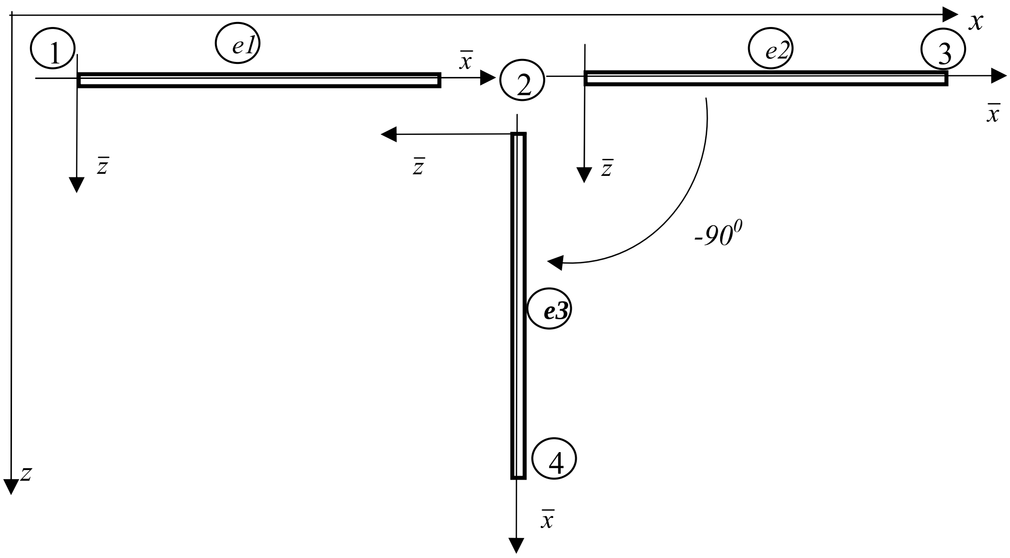


Fig.10.29

Pentru elementele *e1* și *e2* relațiile matriceale între forțele și deplasările nodale au aceeași formă în coordonatele globale, întrucât coordonatele locale coincid cu cele globale. Aceste relații se scriu:

➢ *e1*:
$$\begin{Bmatrix} M_{x1}/L \\ M_{z1}/L \\ F_{y1} \\ M_{x2}/L \\ M_{z2}/L \\ F_{y2} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 6 & 12 & 0 & 6 & -12 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & -6 & -12 & 0 & -6 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varphi_{x1} \\ \varphi_{z1} \\ v_{y1}/L \\ \varphi_{x2} \\ \varphi_{z2} \\ v_{y2}/L \end{Bmatrix} \qquad (10.139)$$

➢ *e2*:
$$\begin{Bmatrix} M_{x2}/L \\ M_{z2}/L \\ F_{y2} \\ M_{x3}/L \\ M_{z3}/L \\ F_{y3} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 6 & 12 & 0 & 6 & -12 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & -6 & -12 & 0 & -6 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varphi_{x2} \\ \varphi_{z2} \\ v_{y2}/L \\ \varphi_{x3} \\ \varphi_{z3} \\ v_{y3}/L \end{Bmatrix} \qquad (10.140)$$

Pentru elementul *e3* sistemul de coordonate locale este rotit cu unghiul $\alpha=270^0$ (sau $\alpha= -90^0$) față de sistemul global; relația matriceală în coordonate locale pentru elementul *e3* se scrie:

$$\begin{Bmatrix} \overline{M}_{x2}/L \\ \overline{M}_{z2}/L \\ \overline{F}_{y2} \\ \overline{M}_{x4}/L \\ \overline{M}_{z4}/L \\ \overline{F}_{y4} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 6 & 12 & 0 & 6 & -12 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & -6 & -12 & 0 & -6 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \overline{\varphi}_{x2} \\ \overline{\varphi}_{z2} \\ \overline{v}_{y2}/L \\ \overline{\varphi}_{x4} \\ \overline{\varphi}_{z4} \\ \overline{v}_{y4}/L \end{Bmatrix} \qquad (10.141)$$

Ținând seama că sistemul de axe local este rotit cu unghiul $\alpha=270^0$ față de sistemul global, matricea de transfer $[T]$ se scrie ținând seama de valorile cosinușilor directori: $\ell = 0$, $m= -1$.

Relația matriceală între forțele și deplasările nodale pentru elementul *e3* scrisă în coordonate globale conform relației (10.115) este:

$$\begin{Bmatrix} M_{x2}/L \\ M_{z2}/L \\ F_{y2} \\ M_{x4}/L \\ M_{z4}/L \\ F_{y4} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -6 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 12 & -6 & 0 & -12 \\ 2 & 0 & -6 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -12 & 6 & 0 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varphi_{x2} \\ \varphi_{z2} \\ v_{y2}/L \\ \varphi_{x4} \\ \varphi_{z4} \\ v_{y4}/L \end{Bmatrix} \qquad (10.142)$$

2. Se scriu ecuațiile matriceale pentru fiecare element în dimensiunea deplasărilor globale $\{\varphi_{x1}, \varphi_{z1}, v_1/L, \varphi_{x2}, \varphi_{z2}, v_2/L, \varphi_{x3}, \varphi_{z3}, v_3/L\}^t$:

- pentru elementul *e1*:

$$\begin{Bmatrix} M_{x1}/L \\ M_{z1}/L \\ F_{y1} \\ M_{x2}/L \\ M_{z2}/L \\ F_{y2} \\ M_{x3}/L \\ M_{z3}/L \\ F_{y3} \\ M_{x4}/L \\ M_{z4}/L \\ F_{y4} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 4 & 6 & 0 & 2 & -6 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 6 & 12 & 0 & 6 & -12 & . & . & . & . & . & . \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 12 & -6 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & -6 & -12 & 0 & -6 & 12 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{x1} \\ \varphi_{z1} \\ v_{y1}/L \\ \varphi_{x2} \\ \varphi_{z2} \\ v_{y2}/L \\ \varphi_{x3} \\ \varphi_{z3} \\ v_{y3}/L \\ \varphi_{x4} \\ \varphi_{z4} \\ v_{y4}/L \end{Bmatrix} \qquad (10.143)$$

- pentru elementul *e2*:

$$\begin{Bmatrix} M_{x1}/L \\ M_{z1}/L \\ F_{y1} \\ M_{x2}/L \\ M_{z2}/L \\ F_{y2} \\ M_{x3}/L \\ M_{z3}/L \\ F_{y3} \\ M_{x4}/L \\ M_{z4}/L \\ F_{y4} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 4 & 6 & 0 & 2 & -6 & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 6 & 12 & 0 & 6 & -12 & . & . & . \\ . & . & . & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 2 & 6 & 0 & 12 & -6 & . & . & . \\ . & . & . & 0 & -6 & -12 & 0 & -6 & 12 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{x1} \\ \varphi_{z1} \\ v_{y1}/L \\ \varphi_{x2} \\ \varphi_{z2} \\ v_{y2}/L \\ \varphi_{x3} \\ \varphi_{z3} \\ v_{y3}/L \\ \varphi_{x4} \\ \varphi_{z4} \\ v_{y4}/L \end{Bmatrix} \qquad (10.144)$$

- pentru elementul *e3*:

$$\begin{Bmatrix} M_{x1}/L \\ M_{z1}/L \\ F_{y1} \\ M_{x2}/L \\ M_{z2}/L \\ F_{y2} \\ M_{x3}/L \\ M_{z3}/L \\ F_{y3} \\ M_{x4}/L \\ M_{z4}/L \\ F_{y4} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 4 & 0 & -6 & 2 & 0 & 6 \\ . & . & . & . & . & . & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & -6 & 0 & 12 & -6 & 0 & -12 \\ . & . & . & . & . & . & 2 & 0 & -6 & 4 & 0 & 6 \\ . & . & . & . & . & . & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & -6 & 0 & -12 & 6 & 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{x1} \\ \varphi_{z1} \\ v_{y1}/L \\ \varphi_{x2} \\ \varphi_{z2} \\ v_{y2}/L \\ \varphi_{x3} \\ \varphi_{z3} \\ v_{y3}/L \\ \varphi_{x4} \\ \varphi_{z4} \\ v_{y4}/L \end{Bmatrix} \qquad (10.145)$$

3. Se scriu ecuațiile de echilibru dintre forțele nodale elementale şi sarcinile exterioare care acționează asupra fiecărui nod .

Ecuațiile de echilibru pentru fiecare din cele patru noduri se scriu ținând seama că reacțiunile necunoscute au sensul axelor de coordonate corespunzătoare iar sarcinile nodale elementale ce acționează asupra nodurilor au sens opus axelor de coordonate (fig. 10.30).

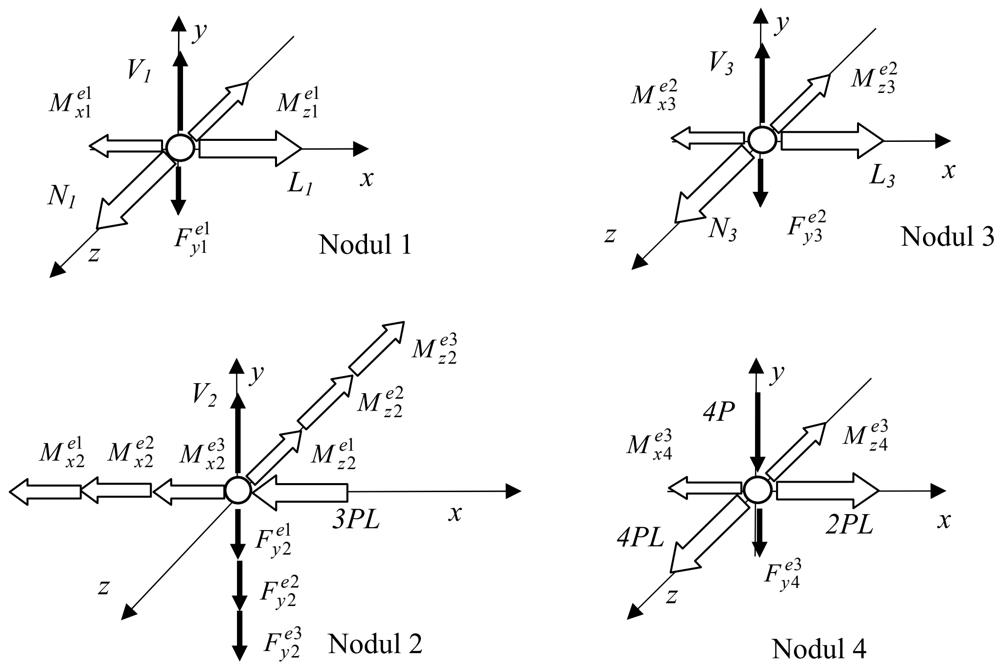


Fig.10.30

- pentru nodul 1: $$\begin{cases}\sum M_x = 0 & \Rightarrow M_{x1}^{e1} = L_1 \\ \sum M_z = 0 & \Rightarrow M_{z1}^{e1} = N_1 \\ \sum F_y = 0 & \Rightarrow F_{y1}^{e1} = V_1\end{cases} \tag{10.146}$$

- pentru nodul 2: $$\begin{cases}\sum M_x = 0 & \Rightarrow M_{x2}^{e1} + M_{x2}^{e2} + M_{x2}^{e3} = -3PL \\ \sum M_z = 0 & \Rightarrow M_{z2}^{e1} + M_{z2}^{e2} + M_{z2}^{e3} = 0 \\ \sum F_y = 0 & \Rightarrow F_{y2}^{e1} + F_{y2}^{e2} + F_{y2}^{e3} = V_2\end{cases} \tag{10.147}$$

- pentru nodul 3: $$\begin{cases}\sum M_x = 0 & \Rightarrow M_{x3}^{e2} = L_3 \\ \sum M_z = 0 & \Rightarrow M_{z3}^{e2} = N_3 \\ \sum F_y = 0 & \Rightarrow F_{y3}^{e2} = V_3\end{cases} \tag{10.148}$$

- pentru nodul 4: $$\begin{cases}\sum M_x = 0 & \Rightarrow M_{x4}^{e3} = 2PL \\ \sum M_z = 0 & \Rightarrow M_{z4}^{e3} = 4PL \\ \sum F_y = 0 & \Rightarrow F_{y4}^{e3} = -4P\end{cases} \tag{10.149}$$

Ecuațiile de echilibru ale forțelor nodale elementale și a forțelor exterioare date de relațiile (10.146) ... (10.149) se pot scrie sub formă matriceală astfel:

$$\left\{\begin{matrix} M_{x1}^{e1}/L \\ M_{z1}^{e1}/L \\ F_{y1}^{e1} \\ M_{x2}^{e1}/L + M_{x2}^{e2}/L + M_{x2}^{e3}/L \\ M_{z2}^{e1}/L + M_{z2}^{e2}/L + M_{z2}^{e3}/L \\ F_{y2}^{e1} + F_{y2}^{e2} + F_{y2}^{e2} \\ M_{x3}^{e2}/L \\ M_{z3}^{e2}/L \\ F_{y3}^{e2} \\ M_{x4}^{e3}/L \\ M_{z4}^{e3}/L \\ F_{y4}^{e3} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} L_1/L \\ N_1/L \\ V_1 \\ -3P \\ 0 \\ V_2 \\ L_3/L \\ N_3/L \\ V_3 \\ 2P \\ 4P \\ -4P \end{matrix}\right\} \tag{10.150}$$

Prin însumarea membru cu membru a relațiilor matriceale (10.143) ... (10.145) se obține în stânga matricea coloană din relația (10.150) iar în dreapta matricea de rigiditate globală a structurii

Ținând seama de relația (10.150) se obține:

$$\frac{EI}{L^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 4 & 6 & 0 & 2 & -6 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 6 & 12 & 0 & 6 & -12 & . & . & . & . & . & . \\ -1 & 0 & 0 & 6 & 0 & -6 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 17 & 0 & 0 & 2 & -6 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -6 & 0 & 36 & 0 & 6 & -12 & -6 & 0 & -12 \\ . & . & . & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 2 & 6 & 0 & 4 & -6 & . & . & . \\ . & . & . & 0 & -6 & -12 & 0 & -6 & -12 & . & . & . \\ . & . & . & 2 & 0 & -6 & . & . & . & 4 & 0 & 6 \\ . & . & . & 0 & -1 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 0 \\ . & . & . & 6 & 0 & -12 & . & . & . & 6 & 0 & 12 \end{bmatrix} \cdot \left\{\begin{matrix} \varphi_{x1} \\ \varphi_{z1} \\ v_1/L \\ \varphi_{x2} \\ \varphi_{z2} \\ v_2/L \\ \varphi_{x3} \\ \varphi_{z3} \\ v_3/L \\ \varphi_{x4} \\ \varphi_{z4} \\ v_4/L \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} L_1/L \\ N_1/L \\ V_1 \\ -3P \\ 0 \\ V_2 \\ L_3/L \\ N_3/L \\ V_3 \\ 2P \\ 4P \\ -4P \end{matrix}\right\} \tag{10.151}$$

4. Se introduc condițiilor la limită și se rezolvă ecuația matriceală

Dacă în ecuația matriceală (10.151) se introduc condițiile la limită:

$$\varphi_{x1} = \varphi_{z1} = \varphi_{x3} = \varphi_{z3} = 0 \;,\; v_1 = v_2 = v_3 = 0, \tag{10.152}$$

și se extrag liniile 1, 2, 3 6, 7, 8 și 9 corespunzătoare reacțiunilor necunocute, respectiv coloanele 1, 2, 3 6, 7, 8 și 9 corespunzătoare deplasărilor nule, se obține o ecuație matriceală având ca necunoscute deplasările nodurilor 2 și 4:

$$\frac{EI}{L^2}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 17 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varphi_{x2} \\ \varphi_{z2} \\ \varphi_{x4} \\ \varphi_{z4} \\ v_4 / L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3P \\ 0 \\ 2P \\ 4P \\ -4P \end{Bmatrix} \tag{10.153}$$

având soluțiile:

$$\begin{gathered} \varphi_{x2} = \frac{3}{2}\frac{PL^2}{EI}; \quad \varphi_{z2} = \frac{1}{4}\frac{PL^2}{EI}; \\ \varphi_{x4} = \frac{11}{2}\frac{PL^2}{EI}; \quad \varphi_{z4} = \frac{17}{4}\frac{PL^2}{EI}; \quad v_4 = -\frac{23}{6}\frac{PL^3}{EI}; \end{gathered} \tag{10.154}$$

5. Postprocesarea rezultatelor

Ecuațiile corespunzătoare liniilor 1, 2, 3 6, 7, 8 şi 9 din ecuația matriceală globale (10.151) se scriu sub formă matriceală astfel:

$$\frac{EI}{L^2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -6 & 0 & 12 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varphi_{x2} \\ \varphi_{z2} \\ \varphi_{x4} \\ \varphi_{z4} \\ v_4 / L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_1 / L \\ N_1 / L \\ V_1 \\ V_2 \\ L_3 / L \\ N_3 / L \\ V_3 \end{Bmatrix} \tag{10.155}$$

având ca soluții pentru reacțiuni:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{EI}{L}(-\varphi_{x2}) = -\frac{3}{2}PL; \\ N_1 &= \frac{EI}{L}(2\varphi_{z2}) = \frac{1}{2}PL; \\ V_1 &= \frac{EI}{L^2}(6\varphi_{z2}) = \frac{3}{2}P; \\ V_2 &= \frac{EI}{L^2}\left(-6\varphi_{x2} - 6\varphi_{x4} + 12\frac{v_4}{L}\right) = 4P; \\ L_3 &= \frac{EI}{L}(-\varphi_{x2}) = -\frac{3}{2}PL; \\ N_3 &= \frac{EI}{L}(2\varphi_{z2}) = \frac{1}{2}PL; \\ V_3 &= \frac{EI}{L^2}(-6\varphi_{z2}) = -\frac{3}{2}P; \end{aligned} \tag{10.156}$$

BIBLIOGRAFIE

1.	Anghel, V., Pastramă, Ş. D., Mareş, C.	-	*Metode şi programe pentru calculul structurilor. Noţiuni teoretice şi aplicaţii în Matlab*, Ed. UP Bucureşti, 1998
2.	Berbente , C, ş.a.	-	*Metode numerice de calcul şi aplicaţii,* Editura U.P. Bucureşti, 1992
3.	Ciarlet, G. Phillipe, Lions, J, L.	-	*Analyse numerique maricielle et optimisation*
4.	Demidovici, B., Maron	-	Elements de calcul numerique, Editura Mir, Moscova
5.	Mineur, H., Berthod Zaborowski, H., s.a	-	*Techniques de calcul numerique.* Librairie Politechnyque Beranger, Dunod, Paris, 1966
6.	Pacoste, C., Stoian, V., Dubină, D.	-	*Metode moderne în mecanica structurilor,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, 1988
7.	Salvadori, M. G, Baron, M. L.	-	*Metodre numerice în tehnică,* Editura Tehnică, Bucureşti 1972, traducere din limba engleză de prof. dr. doc. ing. Mircea N. Soare
8.	Simionescu, I., Dranga, M., Moise, M.	-	*Metode numerice în tehnică. Aplicaţii în Fortran,* Editura Tehnică, Bucureşti, 1995
9.	Tempea, I	-	*Mecanisme plane articulate,* curs litografiat, Ed. I.P.Bucuresti, 1980
10	Marin, C. Popa, I.F., Voicu, A., Ardeleanu, M	-	*O aplicaţie a calculului numeric la analiza pozitionala a mecanismului unei prese cu enunchi folosind metoda Newton Raphson*, Sesiunea stiintifica SIMEC 2004, UTCB, Bucuresti, Facultatrea de Utilaj tehnologic, 26 martie 2004.
11.	Gheorghiu, H., Hadar, A., Constantin, N.		*Analiza structurilor din materiale izotrope şi anizotrope,* Editura Printech, Bucureşti 1998
12.	Hadăr, A.		*Probleme locale la materiale compozite*, Teză de doctorat, U.P.B., 1997.